

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΕΞΑΜΕΝΗΣ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ ΣΤΙΣ ΑΣΤΑΘΕΙΕΣ ΕΚΒΟΛΗΣ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

Ε. Ταλιαδώρου, Γ. Γεωργίου

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΤΘ 20537, 1678 Λευκωσία, Κύπρος

Α. Αλεξάνδρου

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Παραγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΤΘ 20537, 1678 Λευκωσία, Κύπρος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή, επιλύουμε αριθμητικά την χρονομεταβαλλόμενη συμπιεστή ροή εκβολής ενός Νευτώνειου ρευστού χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία στον χώρο και ανάδρομες πεπερασμένες διαφορές στο χρόνο και συμπεριλαμβάνοντας τη δεξαμενή τροφοδοσίας στους υπολογισμούς. Στα τοιχώματα του τριχοειδούς αγωγού από τον οποίο εκβάλλεται το ρευστό θεωρούμε ότι ισχύει ένας μη μονότονος νόμος ολίσθησης βασισμένος σε πειραματικά δεδομένα για τήγματα πολυαιθυλενίου. Στην είσοδο της δεξαμενής η ταχύτητα θεωρείται σταθερή και ομοιόμορφη. Όπως και στην περίπτωση του απλού προβλήματος εκβολής (χωρίς τη δεξαμενή) ο συνδυασμός συμπιεστότητας και μη γραμμικής ολίσθησης οδηγεί σε έμμονες ταλαντώσεις της βαθμίδας πίεσης και της ροής μάζας στην έξοδο του τριχοειδούς, όταν η ογκομετρική παροχή στην είσοδο βρίσκεται στην ασταθή περιοχή. Οι επιδράσεις του όγκου της δεξαμενής και της ογκομετρικής παροχής στις ταλαντώσεις της πίεσης και της ελεύθερης επιφάνειας μελετώνται συστηματικά και συγκρίνονται με διαθέσιμες πειραματικές παρατηρήσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

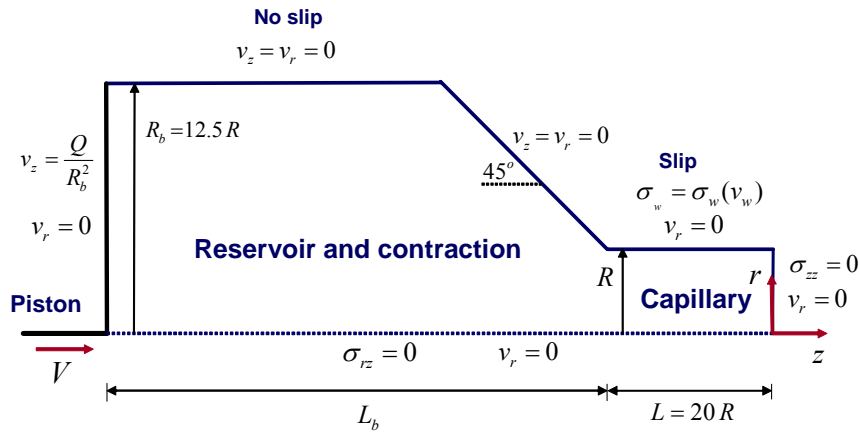
Η ολίσθηση στα τοιχώματα θεωρείται ως ένας καθοριστικός παράγοντας στην έναρξη ασταθειών εκβολής, όπως για παράδειγμα η αστάθεια μη ολίσθησης/ολίσθησης (stick-slip instability) [1,2]. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της αστάθειας μη ολίσθησης/ολίσθησης που δεν εμφανίζεται στους άλλους τύπους ασταθειών εκβολής, π.χ. στην αστάθεια τύπου δέρματος καρχαρία (sharkskin) και θραύσης τήγματος (gross melt fracture), είναι οι έμμονες ταλαντώσεις της πίεσης και της μαζικής παροχής που έχουν σαν αποτέλεσμα μορφές εκβόλου με εναλλασσόμενες τραχείες και λείες περιοχές [1,2]. Οι Achilleos et al. [3] ανασκόπησαν πρόσφατα εργασίες που αφορούσαν στην αριθμητική μοντελοποίηση της αστάθειας μη ολίσθησης/ολίσθησης και συζήτησαν τρεις μηχανισμούς αστάθειας: (α) συνδυασμός μη γραμμικής ολίσθησης και συμπιεστότητας, (β) συνδυασμός μη γραμμικής ολίσθησης και ελαστικότητας, και (γ) καταστατικές αστάθειες.

Στην παρούσα εργασία, διερευνούμε περαιτέρω τον μηχανισμό ολίσθησης/συμπιεστότητας με αριθμητικές προσομοιώσεις. Στόχος μας είναι να επεκτείνουμε τις προσομοιώσεις του Georgiou [4] με τη συμπερίληψη της δεξαμενής τροφοδοσίας στους υπολογισμούς και να μελετήσουμε την επίδραση του μήκους της δεξαμενής στις ταλαντώσεις

της πίεσης. Σύμφωνα με διάφορα πειράματα σε τήγματα πολυμερών [5-8], η περίοδος των ταλαντώσεων αυξάνεται γραμμικά με τον όγκο του πολυμερούς στη δεξαμενή ενώ η κυματομορφή των ταλαντώσεων μένει αμετάβλητη.

ΔΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η γεωμετρία της ροής είναι αυτή που χρησιμοποίησαν οι Hatzikiriakos και Dealy [6] στα πειράματά τους. Μεταξύ της κυλινδρικής δεξαμενής και του τριχοειδούς σωλήνα υπάρχει μια περιοχή συστολής σε γωνία 45° όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες για τη χρονομεταβαλλόμενη ροή στην περιοχή δεξαμενής/τριχοειδούς με ολίσθηση στα τοιχώματα του τριχοειδούς.

Με την χρήση κατάλληλων κλιμάκων, οι αδιάστατες εξισώσεις συνέχειας και διατήρησης της ορμής για χρονομεταβαλλόμενη, συμπιεστή, ισόθερμη ιξώδη ροή με αμελητέα βαρύτητα γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

και

$$Re \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

όπου ρ η πυκνότητα, \mathbf{v} το διάνυσμα της ταχύτητας, p η πίεση, $Re = \rho_0 R V / \eta$ ο αριθμός Reynolds, ρ_0 η πυκνότητα αναφοράς, V η μέση ταχύτητα στον τριχοειδή αγωγό και η το ιξώδες. Οι πιο πάνω εξισώσεις συμπληρώνονται με μια εξίσωση κατάστασης που συσχετίζει την πίεση με την πυκνότητα. Χρησιμοποιήσαμε την πιο κάτω απλή γραμμική σχέση:

$$\rho = 1 + B p \quad (3)$$

όπου $B = \beta \eta V / R$ ο αριθμός συμπιεστότητας και β η ισόθερμη συμπιεστότητα.

Στο τοίχωμα του τριχοειδούς σωλήνα θεωρούμε ότι λαμβάνει χώρα ολίσθηση που υπακούει στο πιο κάτω πλειονότιμο μοντέλο με τρεις κλάδους:

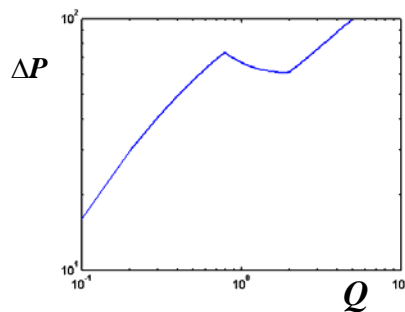
$$v_w = \begin{cases} A_1 \sigma_w^{m_1}, & 0 \leq v_w \leq v_{c2} \\ A_2 \sigma_w^{m_2}, & v_{c2} \leq v_w \leq v_{\min} \\ A_3 \sigma_w^{m_3}, & v_w \geq v_{\min} \end{cases} \quad (4)$$

όπου v_w η σχετική αδιάστατη ταχύτητα του ρευστού ως προς το τοίχωμα και σ_w η αδιάστατη διατμητική τάση στο τοίχωμα. Οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες φαίνονται στο Σχήμα 1. Σαν αρχική συνθήκη χρησιμοποιούμε τη στάσιμη λύση για μια δοσμένη ογκομετρική παροχή Q_{old} την οποία διαταράσσουμε στην επιθυμητή τιμή Q στον χρόνο $t=0$.

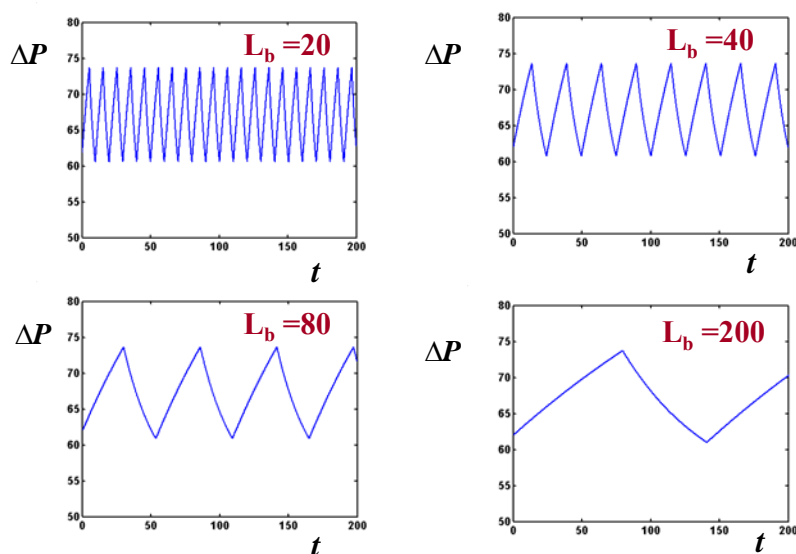
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την αριθμητική επίλυση του υπό μελέτη Νευτώνειου προβλήματος ροής χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με διτετραγωνικές συνάρτησεις βάσης για την ταχύτητα και διγραμμικές για την πίεση. Για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιήσαμε το σχήμα των ανάδρομων πεπερασμένων διαφορών. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται πιο κάτω, οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων ολίσθησης καθώς και του αριθμού συμπίεστικότητας ήταν οι εξής: $m_1=3.23$, $A_1=0.0583$, $m_2=2.86$, $A_2=0.929$, $m_3=-4.43$, $A_3=4.04$, and $B=1.54 \cdot 10^{-4}$.

Κατασκευάσαμε πρώτα τα (στάσιμα) διαγράμματα ροής για την περιοχή δεξαμενής/τριχοειδούς. Στο Σχήμα 2, φαίνεται το λογαριθμικό διάγραμμα της πτώσης πίεσης από την είσοδο της δεξαμενής στην έξοδο του τριχοειδούς σαν συνάρτηση της ογκομετρικής παροχής για $Re=0.01$ και $L_b=80$. Εξαιτίας της μη μονοτονικότητας της εξίσωσης ολίσθησης, το ρεολογικό διάγραμμα παρουσιάζει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, τα οποία ορίζουν τα όρια της ασταθούς περιοχής. Με δεδομένη τη συμπίεστικότητα του ρευστού, η συμπεριφορά της χρονομεταβαλλόμενης λύσης εξαρτάται από το αν η νέα τιμή της ογκομετρικής παροχής αντιστοιχεί σε κλάδο θετικής ή αρνητικής κλίσης. Στην πρώτη περίπτωση, η νέα στάσιμη λύση λαμβάνεται τελικά χωρίς την εμφάνιση ταλαντώσεων, ενώ στη δεύτερη, η λύση ταλαντώνεται και μετά από μια μεταβατική φάση καθίσταται περιοδική με έμμονες ταλαντώσεις της πτώσης πίεσης και της ογκομετρικής παροχής στη έξοδο παρόμοιες με αυτές που παρατηρούνται πειραματικά στην αστάθεια μη ολίσθησης/ολίσθησης.



Σχήμα 2: Διάγραμμα ροής για $Re=0.01$ και $L_b=80$.



Σχήμα 3: Επίδραση του μήκους της δεξαμενής στις ταλαντώσεις της πίεσης για $Q=1.35$ και $Re=0.01$.

Προκειμένου να μελετήσουμε την επίδραση του μήκους της δεξαμενής στις ταλαντώσεις της πίεσης πήραμε αποτελέσματα για διάφορες τιμές του L_b . Στο Σχήμα 3, φαίνονται οι ταλαντώσεις της πίεσης για τέσσερις τιμές του μήκους, $Re=0.01$ και $Q=1.35$. Παρατηρούμε ότι η περίοδος των ταλαντώσεων αυξάνεται με το μήκος L_b , ενώ το πλάτος τους παραμένει πρακτικά αμετάβλητο. Σε συμφωνία με τα πειράματα διάφορων ερευνητών [7-10], η περίοδος T αυξάνεται γραμμικά με τον όγκο της δεξαμενής ενώ το πλάτος είναι σχεδόν σταθερό. Όμως, η περίοδος φαίνεται να διέρχεται από την αρχή των αξόνων σε αντίθεση με τις πειραματικές παρατηρήσεις. Για να δείξουμε την επίδραση του όγκου της δεξαμενής στη μορφή των ταλαντώσεων της πίεσης σχεδιάσαμε τις κανονικοποιημένες ταλαντώσεις της πίεσης κατά τη διάρκεια ενός κύκλου για $L_b = 20$ and 200 . Σε συμφωνία με τα πειράματα [6-8], η κυματομορφή φαίνεται να είναι ανεξάρτητη από το μήκος της δεξαμενής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Denn M.M., Annu. Rev. Fluid Mech. **33**:265 (2001).
- [2] Hatzikiriakos S.G. and Migler K., *Polymer Processing Instabilities: Control and Understanding*, MerceL Dekker, New York (2004).
- [3] Achilleos E., Georgiou G. and Hatzikiriakos S.G., Applied Rheology **12**:88 (2002).
- [4] Georgiou G., J. Non-Newtonian Fluid Mech., **109**:3 (2003).
- [5] Myerholtz R.W., J. Appl. Polym. Sci. **11**:687 (1967).
- [6] Weill A., J. Non-Newtonian Fluid Mech. **7**:303 (1980).
- [7] Hatzikiriakos S.G. and Dealy J.M., J. Rheology **36**:845 (1992).
- [8] Durand V., Vergnes B., Agassant J.F., Benoit. E. and Koopmans R.J., J. Rheology, **40**:383 (1996).
- [9] Sato K. and Toda A., J. Phys. Soc. Japan **70**:3268 (2001).
- [10] Robert L., Vergnes B. and Demay Y., J. Rheology **44**:1183 (2001).