ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Ακαδημαϊκό έτος 2006 - 2007

Αναλλοίωτες συναρτήσεις του Laplace για υπερβολικές εξισώσεις

Γιάννης Χ"Μιχαήλ

Επιβλέπων Καθηγητής: Σοφοκλέους Χριστόδουλος

Μάιος 2007

Πρόλογος

Αυτή η εργασία γίνεται στα πλαίσια του μαθήματος *ΜΑΣ 499: Ανεξάρτητη Εργασία.* Σκοπός της εργασίας είναι η παρουσίαση των αναλλοίωτων συναρτήσεων των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων με σύγχρονους τρόπους όπως μελετήθηκαν από τον N. H. Ibragimov [1]. Η μεθολογία που χρησιμοποιείται βασίζεται στη σχέση των συμμετρικών ομάδων Lie με τις ΜΔΕ (Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις) [2], με την χρήση των ισοδύναμων μετασχηματισμών όπως εισήχθηκαν από τον Ovsiannikov [3]. Για τους αλγεβρικούς υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε το αλγεβρικό πακέτο Maple.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου Χριστόδουλο Σοφοκλέους για την συνεισφορά και πολύτιμη βοήθεια του στη διεκπεραίωση αυτής της εργασίας και την διδακτορική φοιτήτρια Χριστίνα Τσαούση για τη συμβολή της στους αλγεβρικούς υπολογισμούς με το πακέτο MAPLE.

Γ. Χατζημιχαήλ
Λευκωσία, Μάιος 2007

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Οι αναλλοίωτες συναρτήσεις του Laplace (*Laplace invariants* ή *semi-invariants*) αναφέρονται στις γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις δυο μεταβλητών και ανακαλήφθηκαν από τον Laplace το 1773 στην ολοκληρωτική θεωρία του για τις υπερβολικές εξισώσεις [4].

Εφαρμόζοντας την *κλασική μέθοδο* του Lie (βλέπε [2] και [5]) για τις διαφορικές εξισώσεις παίρνουμε τις *ομάδες μετασχηματισμού Lie* ή *συμμετρικές ομάδες* (*groups of transformations* ή *classical symmetries*) οι οποίες επιδρούν στο χώρο των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών μιας ΜΔΕ αφήνοντας τις αναλυτικές λύσεις αναλλοίωτες. Η γνώση της συμμετρικής ομάδας της ΜΔΕ οδηγεί στην εύρεση των συναρτήσεων οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από συγκεκριμένες υποομάδες της ομάδας μετασχηματισμού Lie. Αυτές οι *αναλλοίωτες συναρτήσεις* είναι αρκετά χρήσιμες κάθως επιτρέπουν την κατηγοριοποίηση των ΜΔΕ σύμφωνα με τις τιμές που λαμβάνουν και συμβάλουν στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών με την μέθοδο Riemann.

Σ' αυτή την εργασία θα περιοριστούμε στην μελέτη των αναλλοίωτων συναρτήσεων του Laplace για τις υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις [6] καθώς και στην επέκταση τους [7] βρίσκοντας όλες τις αναλλοίωτες συναρτήσεις για τις υπερβολικές εξισώσεις, συντάσσοντας τη βάση που τις παράγει.

Στο κεφάλαιο 2 δίνεται μια περιληπτική ανασκόπηση της θεωρίας Lie. Αναφέρουμε τον ορισμό της *ομάδας μετασχηματισμού Lie* και με τη χρήση *απειροστών μετασχηματισμών* βρίσκουμε τους *απειροστούς γεννήτορες* οι οποίοι αφήνουν τη ΜΔΕ αναλλοίωτη.

Στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας *ισοδύναμους μετασχηματισμούς* όπως προκύπτουν από τη μέθοδο Lie προσδιορίζουμε τις αναλλοίωτες συναρτήσεις του Laplace για τις υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις και δίνουμε εφαρμογές τους.

Ακολούθως στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η επέκταση των αναλλοίωτων συναρτήσεων Laplace και με παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε τις αναλλοίωτες συναρτήσεις 2ης τάξης κατασκευάζοντας έτσι βάση για όλες τις αναλλοίωτες συναρτήσεις των υπερβολικών ΜΔΕ.

Τέλος στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογισμοί των απειροστών γεννήτορων των μετασχηματισμών με τη βοήθεια του αλγεβρικού πακέτου MAPLE.

2 Ομάδες Μετασχηματισμών Lie

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται οι εισαγωγικές εννοιες των *συμμετρικών Ομάδων Lie* οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια για την εύρεση των αναλλοίωτων συναρτήσεων των γραμμικών υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων.

2.1 Ομάδες Μετασχηματισμών Lie μίας παραμέτρου

Μια (τοπική) *ομάδα μετασχηματισμών Lie* (*Lie group of transformation*) ή *συμμετρική ομάδα Lie* (*classical symmetry*) αποτελεί το μετασχηματισμό ο οποίος επιδρώντας στο σύνολο των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών μιας εξίσωσης αφήνει το σύνολο των αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης αναλλοίωτο.

Η ομάδα μετασχηματισμών Lie μειώνει την τάξη της ΜΔΕ επιτρέποντας να καθορίσουμε τις *αναλλοίωτες λύσεις* (*group-invariant solutions* ή *similarity solutions*) της ΜΔΕ οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες μέσω υποομάδων της ομάδας συμμετρίας. Σ' αυτή την εργασία περιοριζόμαστε μόνο σε ομάδες μετασχηματισμών οι οποίες μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας *απειροστούς μετασχηματισμούς* (*infinitesimal transformations*).

Θεωρούμε μια συνάρτηση $\mathrm{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορισμένη από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, y, u) \\ \bar{y} &= g(x, y, u) \\ \bar{u} &= h(x, y, u) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

όπου $f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$, $h(x, y, u)$ γνωστές καλώς ορισμένες συναρτήσεις. Η συνάρτηση T αποτελεί μετασχηματισμό του χώρου $\mathbb{R}^3$ η οποία απεικονίζει το σημείο (x, y, u) στο $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Εάν $\frac{J(f,g,h)}{J(x,y,u)} \neq 0$ τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= F(\bar{x},\bar{y},\bar{u}) \\ y &= G(\bar{x},\bar{y},\bar{u}) \\ u &= H(\bar{x},\bar{y},\bar{u}) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός I ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \\ \bar{u} &= u \end{aligned}$$

και αποτελεί σύνθεση των (2.1.1) και (2.1.2), δηλ. $\mathrm{I} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{-1}$.

Έστω τώρα ότι ο μετασχηματισμός (2.1.1) εξαρτάται από μια πραγματική παράμετρο λ η οποία είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα τέτοιο ώστε $|\lambda| < \lambda_o$. Τότε το σύνολο των μετασχηματισμών αποτελεί την οικογένεια των μετασχηματισμών T_λ τέτοια ώστε $\mathrm{T}_\lambda(x,y,u) = (\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ όπου

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x,y,u,\lambda) \\ \bar{y} &= g(x,y,u,\lambda) \\ \bar{u} &= h(x,y,u,\lambda) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

όπου $f(x,y,u,\lambda)$, $g(x,y,u,\lambda)$, $h(x,y,u,\lambda)$ γνωστές, αναλυτικές, καλώς ορισμένες συναρτήσεις.

Ορισμός 2.1. *Ορίζουμε ως* ομάδα μετασχηματισμών Lie μιάς παραμέτρου *(*one-parameter Lie group of transformations*) το μετασχηματισμό* T_λ *της μορφής* (2.1.3) *για το οποίο ισχύουν οι ιδιότητες:*

(α) **κλειστότητα:** $\mathrm{T}_\lambda \circ \mathrm{T}_\mu = \mathrm{T}_{\phi(\lambda,\mu)}$

(β) **προσεταιριστική ιδιότητα:** $\mathrm{T}_\lambda \circ (\mathrm{T}_\mu \circ \mathrm{T}_\nu) = (\mathrm{T}_\lambda \circ \mathrm{T}_\mu) \circ \mathrm{T}_\nu$

(γ) **ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου:** $\mathrm{T}_{\lambda_o} = \mathrm{I}$

(δ) **ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου:** $\mathrm{T}_{\lambda^{-1}} = \mathrm{T}_\lambda^{-1}$

όπου T_μ, T_ν *επίσης ομάδες μετασχηματισμών Lie μιάς παραμέτρου και* $\phi(\lambda, \mu)$ *συνεχής συνάρτηση.*

Παράδειγμα 1. Οι μετασχηματισμοί περιστροφής ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\lambda - y\sin\lambda \\ \bar{y} &= x\sin\lambda + y\cos\lambda \\ \bar{u} &= u \end{aligned}$$

και το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ μπορεί να προσδιοριστεί με περιστροφή του σημείου (x, y) κατά γωνία λ. Πράγματι οι μετασχηματισμοί περιστροφής αποτελούν ομάδα μετασχηματισμών Lie. Εύκολα κάποιος μπορεί να δει ότι για $\lambda_o = 0$, $\lambda^{-1} = -\lambda$ και $\phi(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ ο ορισμός (2.1) ικανοποιείται.

2.2 Απειροστοί Μετασχηματισμοί

Μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις του Sophus Lie [8] ήταν ότι οι ιδιότητες των ομάδων μετασχηματισμών προσδιορίζονται εξολοκλήρου και μοναδικά μέσω *απειροστών μετασχηματισμών* (*infinitesimal transformations*) γύρω από τον μοναδιαίο μετασχηματισμό. Επομένως αντί ομάδων μετασχηματισμών χρησιμοποιούμε απειροστούς μετασχηματισμούς και τους αντίστοιχους γεννήτορες που παράγουν αυτούς τους μετασχηματισμούς. Τέτοιοι γεννήτορες καλούνται *γεννήτορες ομάδων* (*group generators*).

Θεωρούμε ότι για την τιμή λ_o της παραμέτρου λ προκύπτει ο ταυτοτικός μετασχηματισμός I. Αναπτύσοντας σε σειρά Taylor τις σχέσεις που ορίζουν τον μετασχηματισμό T_λ γύρω από το λ_o έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \zeta_1(x, y, u)(\lambda - \lambda_o) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \bar{y} &= y + \zeta_2(x, y, u)(\lambda - \lambda_o) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \bar{u} &= u + \eta(x, y, u)(\lambda - \lambda_o) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

όπου $\zeta_1 = \left.\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_o}, \;\; \zeta_2 = \left.\dfrac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_o}, \;\; \eta = \left.\dfrac{\partial h}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_o}.$

Ο μετασχηματισμός (2.2.1) είναι γνωστός ως *απειροστός μετασχηματισμός*.

Μπορούμε τώρα γνωρίζοντας τους γεννήτορες $\zeta_1(x, y, u)$, $\zeta_2(x, y, u)$, και $\eta(x, y, u)$ να εντοπίσουμε τη μορφή της αντίστοιχης ομάδας μετασχηματισμών (2.1.3), λύνοντας το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\lambda} &= \zeta_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \\ \frac{d\bar{y}}{d\lambda} &= \zeta_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \\ \frac{d\bar{u}}{d\lambda} &= \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

με αρχικές συνθήκες $\bar{x} = x, \; \bar{y} = y, \; \bar{u} = u$ για $\lambda = \lambda_o$.

Ο γραμμικός διαφορικός τελεστής

$$\Gamma = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{2.2.3}$$

καλείται *απειροστός γεννήτορας* του μετασχηματισμού (2.2.1).

Παράδειγμα 2. Έστω $\lambda_o = 0, \; \zeta_1(x, y, u) = -y, \; \zeta_2(x, y, u) = x, \; \eta(x, y, u) = 0$. Τότε ο απειροστός γεννήτορας $\Gamma = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ όταν δράσει πάνω στην ομάδα μετασχηματισμών $\mathrm{T}_\lambda(x, y, u)$ δίνει την εξίσωση

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = d\lambda$$

Ολοκληρώνοντας τις δύο πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι $x^2 + y^2 = \alpha^2$ όπου α σταθερά. Αντικαθιστώντας στο δεύτερο ζευγάρι της εξίσωσης παίρνουμε

$$(\alpha^2 - y^2)^{-1/2} dy = d\lambda$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\arcsin\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \lambda + \beta$$

όπου β σταθερά. Επομένως έχουμε τις σχέσεις

$$x = \alpha\cos(\lambda + \beta)$$
$$y = \alpha\cos(\lambda + \beta)$$

Παρατηρούμε ότι οι πιο πάνω σχέσεις ορίζουν μια ομάδα μετασχηματισμών ισοδύναμη με αυτή του Παραδείγματος 1. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$x = \alpha\cos\lambda\cos\beta - \alpha\sin\lambda\sin\beta$$
$$y = \alpha\sin\lambda\cos\beta - \alpha\cos\lambda\sin\beta$$

Επομένως αν πάρουμε $x = \alpha\cos\beta$ και $y = \alpha\sin\beta$ καταλήγουμε στον μετασχηματισμό περιστροφής του Παραδείγματος 1.

2.3 Αναλλοίωτες ΜΔΕ

Ορισμός 2.2. *Ορίζουμε μια συνάρτηση* $F(x, y, u)$ αναλλοίωτη *μέσω του μετασχηματισμού* (2.2.1) *αν και μόνο αν*

$$\mathrm{F}(x, y, u) = \mathrm{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$$

Αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση $\mathrm{F}(x, y, u)$ είναι αναλλοίωτη αν και μόνο αν είναι λύση της

$$\Gamma\mathrm{F}(x, y, u) = 0$$

όπου Γ είναι ο απειροστός τελεστής (2.2.3).

Για να εξετάσουμε πότε μια ΜΔΕ παραμένει αναλοίωτη μέσω των μετασχηματισμών (2.2.1) θα πρέπει να εξετάσουμε πως μεταβάλονται οι παράγωγοι ανωτέρας τάξης. Για τις παραγώγους δευτέρας τάξης ορίζουμε τους *μετασχηματισμούς επέκτασης* (*prolongation transformation*)

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{\bar{x}} &= u_x + \xi_1(x, y, u, u_x, u_y) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\bar{u}_{\bar{y}} &= u_y + \xi_2(x, y, u, u_x, u_y) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &= u_{xx} + \xi_{11}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} &= u_{xy} + \xi_{12}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} &= u_{yy} + \xi_{22}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) + \mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}
\tag{2.3.1}
$$

όπου οι γεννήτορες επέκτασης δίνονται από τους τύπους (*prolongation formulae*)

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\zeta_1) - u_y D_x(\zeta_2) \\
\xi_2 &= D_y(\eta) - u_x D_y(\zeta_1) - u_y D_y(\zeta_2) \\
\xi_{11} &= \bar{D}_x(\xi_1) - u_{xx}\bar{D}_x(\zeta_1) - u_{xy}\bar{D}_x(\zeta_2) \\
\xi_{12} &= \bar{D}_y(\xi_1) - u_{xx}\bar{D}_y(\zeta_1) - u_{xy}\bar{D}_y(\zeta_2) \\
\xi_{21} &= \bar{D}_x(\xi_2) - u_{xy}\bar{D}_x(\zeta_1) - u_{yy}\bar{D}_x(\zeta_2) \\
\xi_{22} &= \bar{D}_y(\xi_2) - u_{xy}\bar{D}_y(\zeta_1) - u_{yy}\bar{D}_y(\zeta_2)
\end{aligned}
$$

με $\xi_{12} = \xi_{21}$ και

$$
\begin{aligned}
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{yx}\frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} \\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y\frac{\partial}{\partial u} + u_{yy}\frac{\partial}{\partial u_y} + u_{yx}\frac{\partial}{\partial u_x} \\
\bar{D}_x &= D_x + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xyx}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{yyx}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} \\
\bar{D}_y &= D_y + u_{xxy}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xyy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{yyy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}}
\end{aligned}
$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τους απειροστούς τελεστές γεννήτορων επέκτασης

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(1)} &= \Gamma + \xi_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \xi_2\frac{\partial}{\partial u_y} \\
\Gamma^{(2)} &= \Gamma^{(1)} + \xi_{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \xi_{12}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \xi_{22}\frac{\partial}{\partial u_{yy}}
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

όπου $\Gamma = \zeta_1\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y} + \eta\frac{\partial}{\partial u}$.

Ένας μετασχηματισμός καλείται *συμμετρία Lie* μιας ΜΔΕ δευτέρας τάξης

$$\mathrm{E}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

εάν η ΜΔΕ έχει την ίδια μορφή με τις νέες μεταβλητές $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$, δηλαδή

$$\mathrm{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{xy}, \bar{u}_{yy}) = 0$$

Τέλος η ΜΔΕ $\mathrm{E} = 0$ έχει μια συμμετρία Lie του απειροστού μετασχηματισμού αν και μόνο αν

$$\Gamma^{(2)}\mathrm{E}\Big|_{\mathrm{E}=0} = 0$$

Η πιο πάνω εξίσωση οδηγεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις $\zeta_1(x, y, u)$, $\zeta_2(x, y, u)$, $\eta(x, y, u)$ του οποίου η λύση προσδιορίζει τις συμμετρίες Lie της ΜΔΕ.

3 Αναλλοίωτες συναρτήσεις Laplace

Σε αυτό το κεφάλαιο υπολογίζονται οι αναλλοίωτες συναρτήσεις Laplace όπως μελετήθηκαν από τον N.H. Ibragimov [6] χρησιμοποιώντας *ισοδύναμους μετασχηματισμούς* και τους *απειροστούς γεννήτορες* που τους παράγουν. Επίσης κατηγοριοποιούνται ορισμένες κλάσεις υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν οι αναλλοίωτες συναρτήσεις και τέλος δίνονται ορισμένα παραδείγματα.

3.1 Υπολογισμός αναλλοίωτων συναρτήσεων Laplace

Ορισμός 3.1. *Καλούμε* ισοδύναμο μετασχηματισμό *την ομάδα μετασχηματισμών Lie η οποία αφήνει μια ΜΔΕ αναλλοίωτη, δηλαδή όταν επιδράσει σε αυτή, η μορφή της εξίσωσης με τις νέες συντεταγμένες καθώς και το σύνολο των λύσεων της ΜΔΕ παραμένουν αναλλοίωτα.*

Ορισμός 3.2. *Δύο ΜΔΕ καλούνται* ισοδύναμες *αν συνδέονται μεταξύ τους μέσω ισοδύναμου μετασχηματισμού.*

Η εύρεση των ισοδύναμων μετασχηματισμών γίνεται μέσω της κλασικής μεθόδου Lie. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αρκεί να γνωρίζουμε τους συντελεστές του απειροστού γεννήτορα οπότε βρίσκουμε μέσω του κατάλληλου συστήματος τον αντίστοιχο μετασχηματισμό. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η όλη διαδικασία είναι ανεξάρτητη από τις συνοριακές συνθήκες που ενδέχεται να έχει η ΜΔΕ.

Θεωρούμε τώρα την υπερβολική διαφορική εξίσωση

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{3.1.1}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχει ισοδύναμος μετασχηματισμός

$$\bar{x} = f(x, y, u)$$
$$\bar{y} = g(x, y, u)$$
$$\bar{u} = h(x, y, u)$$

τέτοιος ώστε η (3.1.1) να παραμένει γραμμική και ομογενής, αλλά εν γένει με νέους συντελεστές $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Η ομάδα αυτών των ισοδύναμων μετασχηματισμών είναι μια άπειρη ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών της μορφής

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sigma(x, y)u, \quad \sigma(x, y) \neq 0 \\ \bar{x} &= f(x) \\ \bar{y} &= g(y) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

όπου $\sigma(x, y)$, $f(x)$, $g(y)$ αυθαίρετες συναρτήσεις και $\bar{u}$ καινούρια εξαρτημένη μεταβλητή.

Οι αναλλοίωτες συναρτήσεις του Laplace με το πιο πάνω μετασχηματισμό αποτελούν συνδυασμούς των συντελεστών a, b, c της (3.1.1) και των παραγώγων τους οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες υπό το μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} u &= \sigma(x, y)\bar{u}, \quad \sigma(x, y) \neq 0 \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Έστω ο απειροστός μετασχηματισμός $\sigma(x, y) \approx 1 + \varepsilon n(x, y)$ όπου $n(x, y)$ αυθαίρετη συνάρτηση και ε μικρή παράμετρος. Τότε έχουμε ότι

$$u \approx [1 + \varepsilon n(x, y)]\bar{u} \tag{3.1.4}$$

Παραγωγίζουμε για να λάβουμε

$$u_x \approx (1 + \varepsilon n)\bar{u}_x + \varepsilon n_x \bar{u}$$
$$u_y \approx (1 + \varepsilon n)\bar{u}_y + \varepsilon n_y \bar{u}$$
$$u_{xy} \approx (1 + \varepsilon n)\bar{u}_{xy} + \varepsilon n_y \bar{u}_x + \varepsilon n_x \bar{u}_y + \varepsilon n_{xy} \bar{u}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.1.1) λαμβάνουμε

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu \approx$$

$$(1+\varepsilon n)\bar{u}_{xy} + \varepsilon n_y \bar{u}_x + \varepsilon n_x \bar{u}_y + \varepsilon n_{xy}\bar{u} + (1+\varepsilon n)a\bar{u}_x + \varepsilon n_x a\bar{u} + (1+\varepsilon n)b\bar{u}_y + \varepsilon n_y b\bar{u} + (1+\varepsilon n)c\bar{u}$$

Αφού $(1+\varepsilon n)^{-1} = 1 - \varepsilon n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ τότε διαιρώντας με $1+\varepsilon n$ παίρνουμε την προσεγγιστική διαφορική εξίσωση της (3.1.1)

$$\bar{u}_{xy} + (a+\varepsilon n_y)\bar{u}_x + (b+\varepsilon n_x)\bar{u}_y + \big(c + \varepsilon(n_{xy} + an_x + bn_y)\big)\bar{u} = 0 \tag{3.1.5}$$

Έχουμε έτσι τον εξής μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης (3.1.5)

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u - \epsilon\, n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{x} &= x\\
\bar{y} &= y\\
\bar{a} &= a + \epsilon\, n_y + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{b} &= b + \epsilon\, n_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{c} &= c + \epsilon(n_{xy} + an_x + bn_y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

από τον οποίο λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} = n \qquad \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = 0 \qquad \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = 0 \qquad \frac{d\bar{a}}{d\varepsilon} = n_y \qquad \frac{d\bar{b}}{d\varepsilon} = n_y \qquad \frac{d\bar{c}}{d\varepsilon} = n_{xy} + an_x + bn_y$$

Το σύστημα των πιο πάνω διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες για $\varepsilon = 0$, $\bar{u} = u,\ \bar{x} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{a} = a,\ \bar{b} = b,\ \bar{c} = c$ μας δίνει τη λύση της ομάδας μετασχηματισμών (3.1.6).

Από το ανωτέρω σύστημα παράγεται ο απειροστικός γεννήτορας του (3.1.6)

$$\Gamma = -n\frac{\partial}{\partial u} + n_y\frac{\partial}{\partial a} + n_x\frac{\partial}{\partial b} + (n_{xy} + an_x + bn_y)\frac{\partial}{\partial c} \tag{3.1.7}$$

Δρώντας πάνω στην $J = J(a,b,c)$ έχουμε

$$n_y\frac{\partial J}{\partial a} + n_x\frac{\partial J}{\partial b} + (n_{xy} + an_x + bn_y)\frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

και έπεται ότι

$$n_y(\frac{\partial J}{\partial a} + b\frac{\partial J}{\partial c}) + n_x(\frac{\partial J}{\partial b} + a\frac{\partial J}{\partial c}) + n_{xy}\frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

Αφού η $n(x,y)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση τότε έχουμε ότι

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

και επομένως η $J = J(a,b,c)$ είναι σταθερή.

Άρα για να βρούμε της λύσεις της J μέσω του μετασχηματισμού (3.1.6) θεωρούμε το μετασχηματισμό επέκτασης 1ης τάξης του (3.1.6)

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u - \epsilon\, n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{x} &= x\\
\bar{y} &= y\\
\bar{a}_x &= a_x + \epsilon\mu_1^x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{b}_x &= b_x + \epsilon\mu_2^x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{c}_x &= c_x + \epsilon\mu_3^x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{a}_y &= a_y + \epsilon\mu_1^y + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{b}_y &= b_y + \epsilon\mu_2^y + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\\
\bar{c}_y &= c_y + \epsilon\mu_3^y + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

όπου οι γεννήτορες επέκτασης δίνονται από τους τύπους

$$\mu_1^\jmath = \tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\mu_1) - a_x\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_1) - a_y\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_2)$$

$$\mu_2^\jmath = \tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\mu_2) - b_x\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_1) - b_y\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_2)$$

$$\mu_3^\jmath = \tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\mu_3) - c_x\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_1) - c_y\tilde{\mathrm{D}}_\jmath(\zeta_2)$$

για $\jmath = x, y$ και

$$\tilde{\mathrm{D}}_x = \frac{\partial}{\partial x} + a_x\frac{\partial}{\partial a} + b_x\frac{\partial}{\partial b} + c_x\frac{\partial}{\partial x} + a_{xx}\frac{\partial}{\partial a_x} + a_{yx}\frac{\partial}{\partial a_y} + b_{xx}\frac{\partial}{\partial b_x} + b_{yx}\frac{\partial}{\partial b_y} + c_{xx}\frac{\partial}{\partial c_x} + c_{yx}\frac{\partial}{\partial c_y}$$

$$\tilde{\mathrm{D}}_y = \frac{\partial}{\partial y} + a_y\frac{\partial}{\partial a} + b_y\frac{\partial}{\partial b} + c_y\frac{\partial}{\partial x} + a_{xy}\frac{\partial}{\partial a_x} + a_{yy}\frac{\partial}{\partial a_y} + b_{xy}\frac{\partial}{\partial b_x} + b_{yy}\frac{\partial}{\partial b_y} + c_{xy}\frac{\partial}{\partial c_x} + c_{yy}\frac{\partial}{\partial c_y}$$

με ζ_1, ζ_2 τους απειροστούς γεννήτορες των x, y αντίστοιχα και $\mu_\imath$, $\imath = 1, 2, 3$ τους απειροστούς γεννήτορες των a, b, c , δηλαδή

$$\mu_1 = n_y$$

$$\mu_2 = n_x$$

$$\mu_3 = n_{xy} + an_x + bn_y$$

Επειδή $\bar{x} = x$ και $\bar{y} = y$ έχουμε ζ_1, $\zeta_2 = 0$ και επομένως

$$\begin{gathered}
\mu_1^x = \frac{d\bar{a}_{\bar{x}}}{d\varepsilon} = n_{yx} \ , \qquad \mu_1^y = \frac{d\bar{a}_{\bar{y}}}{d\varepsilon} = n_{yy} \\
\mu_2^x = \frac{d\bar{b}_{\bar{x}}}{d\varepsilon} = n_{xx} \ , \qquad \mu_2^y = \frac{d\bar{b}_{\bar{y}}}{d\varepsilon} = n_{xy} \\
\mu_3^x = \frac{d\bar{c}_{\bar{x}}}{d\varepsilon} = n_{xxy} + a_x n_x + an_{xx} + b_x n_y + bn_{xy} \\
\mu_3^y = \frac{d\bar{a}_{\bar{x}}}{d\varepsilon} = n_{xyy} + a_y n_x + an_{xy} + b_y n_y + bn_{yy}
\end{gathered}$$

Επομένως ο απειροστός γεννήτορας επέκτασης 1ης τάξης για το μετασχηματισμό (3.1.8) είναι

$$\begin{gathered}
\Gamma^{(1)} = \Gamma + n_{yx}\frac{\partial}{\partial a_x} + n_{yy}\frac{\partial}{\partial a_y} + n_{xx}\frac{\partial}{\partial b_x} + n_{xy}\frac{\partial}{\partial b_y} + \\
(n_{xxy} + a_x n_x + an_{xx} + b_x n_y + bn_{xy})\frac{\partial}{\partial c_x} + \\
(n_{xyy} + a_y n_x + an_{xy} + b_y n_y + bn_{yy})\frac{\partial}{\partial c_y}
\end{gathered} \tag{3.1.9}$$

Έστω τώρα ότι $J = J(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, x_y)$ τότε θα έχουμε $\Gamma^{(1)} J = 0$ και επομένως

$$\begin{gathered}
n_x(\frac{\partial J}{\partial b} + a\frac{\partial J}{\partial c} + a_x\frac{\partial J}{\partial c_x} + a_y\frac{\partial J}{\partial c_y}) + n_y(\frac{\partial J}{\partial a} + b\frac{\partial J}{\partial c} + b_x\frac{\partial J}{\partial c_x} + b_y\frac{\partial J}{\partial c_y}) + \\
n_{xy}(\frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial a_x} + \frac{\partial J}{\partial b_y} + b\frac{\partial J}{\partial c_x} + a\frac{\partial J}{\partial c_y}) + n_{xx}(\frac{\partial J}{\partial b_x} + a\frac{\partial J}{\partial c_x}) + n_{yy}(\frac{\partial J}{\partial a_y} + b\frac{\partial J}{\partial c_y}) + \\
n_{xxy}\frac{\partial J}{\partial c_x} + n_{xyy}\frac{\partial J}{\partial c_y} = 0
\end{gathered}$$

Επειδή η $n(x, y)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση έχουμε

$$\frac{\partial J}{\partial c_x} = \frac{\partial J}{\partial c_y} = 0 \qquad \text{και άρα} \qquad \frac{\partial J}{\partial b_x} = \frac{\partial J}{\partial a_y} = 0$$

Επομένως η J δεν εξαρτάται από τις a_x, b_x, c_x, c_y, δηλαδή $J = J(a, b, c, a_x, b_y)$.
Από τους συντελεστές n_{xy}, n_x, n_y έχουμε ότι

$$\frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial b_y} + \frac{\partial J}{\partial a_x} = 0 \tag{3.1.10a}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} + b\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \tag{3.1.10b}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} + a\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \tag{3.1.10c}$$

Από τις (3.1.10b) και (3.1.10c) έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\frac{da}{1} = \frac{dc}{b} = \frac{dJ}{0} \quad \text{και} \quad \frac{db}{1} = \frac{dc}{a} = \frac{dJ}{0}$$

και άρα $c = ab - \mu$, όπου μ σταθερά. Επομένως $J = J(\mu, a_x, b_y)$ και η (3.1.10a) γίνεται

$$-\frac{\partial J}{\partial \mu} + \frac{\partial J}{\partial b_y} + \frac{\partial J}{\partial a_x} = 0$$

από όπου έπεται ότι

$$\frac{d\mu}{-1} = \frac{db_y}{1} = \frac{da_x}{1} = \frac{dJ}{0}$$

Άρα $\mu = -b_y + \theta_1$, $\mu = -a_x + \theta_2$ και $a_x = b_y + \theta_3$ όπου θ_1, θ_2, θ_3 οι σταθερές ολοκλήρωσης.

Η λύση του

$$\frac{\partial J}{\partial c} + \frac{\partial J}{\partial b_y} + \frac{\partial J}{\partial a_x} = 0$$

όπου $J = J(ab - c, a_x, b_y)$ δίνεται από την $\mathrm{F}(\xi, \nu)$ όπου $\xi = a_x - b_y$ και $\nu = a_x + \mu = a_x + ab - c$.

Συμβολίζοντας με $h = \nu$ και $k = \nu - \xi$ παίρνουμε τις αναλλοίωτες συναρτήσεις του Laplace

$$\boxed{h = a_x + ab - c} \qquad \text{και} \qquad \boxed{k = b_y + ab - c} \tag{3.1.11}$$

3.2 Εφαρμογές των αναλλοίωτων συναρτήσεων Laplace

Έστω η κανονική μορφή μιας υπερβολικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{3.2.1}$$

και ο ισοδύναμος μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} v = \sigma(x,y)u, \quad \sigma(x,y) &\neq 0 \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Τότε έχουμε τις εξής εφαρμογές των αναλλοίωτων συναρτήσεων Laplace:

I. Μια υπερβολική διαφορική εξίσωση της μορφής (3.2.1) μπορεί να αναχθεί με κατάλληλο ισοδύναμο μετασχηματισμό της μορφής (3.2.2) στη εξίσωση κύματος $v_{xy} = 0$ αν και μόνο αν $h = k = 0$.

II. Μια υπερβολική διαφορική εξίσωση της μορφής (3.2.1) μπορεί να αναχθεί με κατάλληλο ισοδύναμο μετασχηματισμό της μορφής (3.2.2) στη μορφή $v_{xy}+f(x,y)v = 0$ αν και μόνο αν $h = k$.

III. Μια υπερβολική διαφορική εξίσωση της μορφής (3.2.1) μπορεί να αναχθεί με κατάλληλο ισοδύναμο μετασχηματισμό της μορφής (3.2.2) στη τηλεγραφική εξίσωση $v_{xy} + \lambda v = 0$, όπου λ σταθερά, αν και μόνο αν $h = k = \lambda$.

IV. Τέλος η υπερβολική διαφορική εξίσωση της μορφής (3.2.1) μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο, δηλαδή ο τελεστής της διαφορικής εξίσωσης $\mathrm{L} = \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y + a(x,y)\mathrm{D}_x + b(x,y)\mathrm{D}_y + c(x,y)$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δυο τελεστών πρώτης τάξης αν και μόνο αν μια από τις αναλλοίωτες συναρτήσεις είναι μηδέν.

   Με άλλα λόγια έχουμε ότι:

$$\mathrm{L} = [\mathrm{D}_x + \alpha(x,y)][\mathrm{D}_y + \beta(x,y)] \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad h = 0$$

   και

$$\mathrm{L} = [\mathrm{D}_y + \beta(x,y)][\mathrm{D}_x + \alpha(x,y)] \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad k = 0$$

Θα αποδείξουμε τις πιο πάνω περιπτώσεις δίνοντας ορισμένα παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

Περίπτωση Ι:

Έστω ότι η (3.2.1) μπορεί να μειωθεί στην εξίσωση κύματος $v_{xy} = 0$ μέσω του ισοδύναμου μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} v &= e^{\phi(x,y)}u, \quad \phi(x,y) = \phi(\bar{x},\bar{y}) \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Τότε έχουμε ότι

$$u_x = (v_x - v\phi_x)e^{-\phi(x,y)}, \qquad u_y = (v_y - v\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$
$$u_{xy} = (v_{xy} - v_x\phi_y - v_y\phi_x - v\phi_{xy} + v\phi_x\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.2.1) λαμβάνουμε ότι

$$[\, v_{xy} + (a - \phi_y)v_x + (b - \phi_x)v_y + (-\phi_{xy} + \phi_x\phi_y - a\phi_x - b\phi_y + c)v \,]\, e^{-\phi(x,y)} = 0$$

Επομένως η (3.2.1) μειώνεται στην $v_{xy} = 0$ αν και μονό αν

$$\begin{aligned} a - \phi_y &= 0 \\ b - \phi_x &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

και

$$\phi_{xy} - \phi_x\phi_y + a\phi_x + b\phi_y - c = 0 \tag{3.2.5}$$

Το σύστημα (3.2.4) είναι σύστημα δύο εξισώσεων με μια άγνωστη συνάρτηση $\phi(x,y)$ και αφού $\phi(x,y)$ συνεχής έχουμε ότι $\phi_{xy} = \phi_{yx}$. Άρα παίρνουμε ότι

$$a_x = b_y \tag{3.2.6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.2.6), η (3.2.5) γράφεται ως

$$a_x + ab - c = 0$$

ή

$$b_y + ab - c = 0$$

Επομένως αφού οι συναρτήσεις h, k του Laplace είναι $h = a_x + ab - c$ και $k = b_y + ab - c$ έπεται ότι

$$h = k = 0$$

Αντίστροφα εάν $h = k = 0$ θεωρούμε τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης (3.2.1)

$$u = \sigma(x,y)\, v(\bar{x},\bar{y}), \quad \sigma(x,y) \neq 0$$
$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = y$$

Τότε παραγωγίζοντας την $u(x,y)$ παίρνουμε

$$u_x = \sigma_x v + \sigma v_x$$
$$u_y = \sigma_y v + \sigma v_y$$
$$u_{xy} = \sigma_{xy} v + \sigma_y v_x + \sigma_x v_y + \sigma v_{xy}$$

Άρα η (3.2.1) γίνεται

$$\sigma v_{xy} + (a\sigma + \sigma_y)v_x + (b\sigma + \sigma_x)v_y + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma)v = 0$$

Για την περίπτωση όπου $v_{xy} = 0$ έχουμε

$$a\sigma + \sigma_y = 0 \tag{3.2.7a}$$
$$b\sigma + \sigma_x = 0 \tag{3.2.7b}$$
$$\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma = 0 \tag{3.2.7c}$$

Από την (3.2.7a) έχουμε $\sigma = f(x)e^{-\int a dy}$ και από την (3.2.7b) έχουμε $\sigma = g(y)e^{-\int b dx}$ άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ όπου $\phi_y = a$ και $\phi_x = b$.

Η $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ ικανοποιεί την (3.2.7c) αφού $\sigma_x = -b\sigma$ άρα $\sigma_{xy} = -\phi_{xy}\sigma + ab\sigma$ και έτσι αντικαθιστώντας στην (3.2.7c) έχουμε $-\phi_{xy}\sigma + ab\sigma - ab\sigma - ab\sigma + c\sigma = -\phi_{xy}\sigma - ab\sigma + c\sigma$. Αφού $h = a_x + ab - c = 0$ και $k = b_y + ab - c = 0$ έπεται ότι $-\phi_{xy} - ab + c = 0$.

Άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ και αν $h = k = 0$ με τον μετασχηματισμό

$$u = v(\bar{x}, \bar{y})\, e^{-\phi(x,y)}$$
$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = y$$

η (3.2.1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση κύματος $v_{xy} = 0$.

Σημείωση 1. Η συνάρτηση $\phi(x, y)$ μπορεί να βρεθεί επιλύοντας το σύστημα

$$\phi_y = a(x, y)$$
$$\phi_x = b(x, y)$$

Αφού η εξίσωση (3.2.1) μετασχηματίζεται μέσω του (3.2.3) στη $v_{xy} = 0$ όπου $v(x, y) = f(x) + g(y)$ έχουμε $u(x, y) = [f(x) + g(y)]\, e^{-\phi(x,y)}$.

Παράδειγμα 1. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = \mu, \quad b = \lambda \quad \text{και} \quad c = \mu\lambda$$

όπου μ, λ σταθερές. Τότε $a_x = b_y = 0$ και $h = k = 0$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \phi_y = \mu \quad \text{και άρα} \quad \phi = \mu y + f(x) \\ \phi_x = \lambda \quad \text{και άρα} \quad \phi = \lambda x + g(y) \end{array}\right\} \phi(x, y) = \mu y + \lambda x + \phi_o$$

όπου ϕ_o σταθερά και με το μετασχηματισμό (3.2.3)

$$u(x, y) = v(x, y)\, e^{-(\mu y + \lambda x + \phi_o)} \qquad \text{με} \qquad v_{xy} = 0.$$

Παράδειγμα 2. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = \frac{2y}{y^2 - x^2}, \quad b = \frac{-2x}{y^2 - x^2} \quad \text{και} \quad c = 0$$

Τότε

$$a_x = b_y = \frac{4xy}{(y^2 - x^2)^2}$$

και $h = k = 0$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \phi_y = \frac{2y}{y^2 - x^2} \\ \phi_x = \frac{-2x}{y^2 - x^2} \end{array}\right\} \phi(x, y) = \ln y^2 - x^2$$

και με το μετασχηματισμό (3.2.3)

$$u(x, y) = \frac{v(x, y)}{y^2 - x^2} \qquad \text{με} \qquad v_{xy} = 0.$$

Παράδειγμα 3. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad c = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Τότε

$$a_x = b_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

και $h = k = 0$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \phi_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \phi_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array}\right\} \phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln x^2 + y^2$$

και με το μετασχηματισμό (3.2.3)

$$u(x, y) = \frac{v(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{με} \qquad v_{xy} = 0.$$

Περίπτωση ΙΙ:

Έστω ότι η (3.2.1) μπορεί να μειωθεί στην εξίσωση $v_{xy} + f(x, y)v = 0$ μέσω του ισοδύναμου μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} &v = e^{\phi(x,y)}u, \quad \phi(x, y) = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\bar{x} = x \\ &\bar{y} = y \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Τότε έχουμε ότι

$$u_x = (v_x - v\phi_x)e^{-\phi(x,y)}, \qquad u_y = (v_y - v\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$
$$u_{xy} = (v_{xy} - v_x\phi_y - v_y\phi_x - v\phi_{xy} + v\phi_x\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.2.1) λαμβάνουμε ότι

$$[\, v_{xy} + (a - \phi_y)v_x + (b - \phi_x)v_y + (-\phi_{xy} + \phi_x\phi_y - a\phi_x - b\phi_y + c)v \,]\, e^{-\phi(x,y)} = 0$$

Επομένως η (3.2.1) μειώνεται στην $v_{xy} + f(x, y)v = 0$ αν και μονό αν

$$\begin{aligned} a - \phi_y &= 0 \\ b - \phi_x &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

και

$$\phi xy - \phi_x\phi_y + a\phi_x + b\phi_y - c = -f(x, y) \tag{3.2.10}$$

Το σύστημα (3.2.9) είναι σύστημα δύο εξισώσεων με μια άγνωστη συνάρτηση $\phi(x, y)$ και αφού $\phi(x, y)$ συνεχής έχουμε ότι $\phi_{xy} = \phi_{yx}$. Άρα παίρνουμε ότι

$$a_x = b_y \tag{3.2.11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.2.11), η (3.2.10) γράφεται ως

$$a_x + ab - c = -f(x, y)$$

ή

$$b_y + ab - c = -f(x, y)$$

Επομένως αφού οι συναρτήσεις h, k του Laplace είναι $h = a_x + ab - c$ και $k = b_y + ab - c$ έπεται ότι

$$h = k$$

Αντίστροφα εάν $h = k$ θεωρούμε τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης (3.2.1)

$$\begin{aligned} &u = \sigma(x,y)\, v(\bar{x},\bar{y}), \quad \sigma(x,y) \neq 0 \\ &\bar{x} = x \\ &\bar{y} = y \end{aligned}$$

Τότε παραγωγίζοντας την $u(x,y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_x &= \sigma_x v + \sigma v_x \\ u_y &= \sigma_y v + \sigma v_y \\ u_{xy} &= \sigma_{xy} v + \sigma_y v_x + \sigma_x v_y + \sigma v_{xy} \end{aligned}$$

Άρα η (3.2.1) γίνεται

$$\sigma v_{xy} + (a\sigma + \sigma_y) v_x + (b\sigma + \sigma_x) v_y + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma) v = 0$$

Για την περίπτωση όπου $v_{xy} + f(x,y)v = 0$ έχουμε

$$a\sigma + \sigma_y = 0 \tag{3.2.12a}$$

$$b\sigma + \sigma_x = 0 \tag{3.2.12b}$$

$$\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma = \sigma f(x,y) \tag{3.2.12c}$$

Από την (3.2.12a) έχουμε $\sigma = f(x)e^{-\int a dy}$ και από την (3.2.12b) έχουμε $\sigma = g(y)e^{-\int b dx}$ άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ όπου $\phi_y = a$ και $\phi_x = b$.
Η $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ ικανοποιεί την (3.2.12c) αφού $\sigma_x = -b\sigma$ άρα $\sigma_{xy} = -\phi_{xy}\sigma + ab\sigma$ και έτσι αντικαθιστώντας στην (3.2.12c) έχουμε $-\phi_{xy}\sigma + ab\sigma - ab\sigma - ab\sigma + c\sigma = -\phi_{xy}\sigma - ab\sigma + c\sigma$.

Έχουμε ότι $h = k$ και έστω $h = k = -f(x,y)$. Τότε έπεται ότι $-\phi_{xy} - ab + c = f(x,y)$

Άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ και αν $h = k$ με τον μετασχηματισμό

$$u = v(\bar{x}, \bar{y})\, e^{-\phi(x,y)}$$

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = y$$

η (3.2.1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση $v_{xy} + f(x,y)v = 0$.

Παράδειγμα 4. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = x^2 + 2xy\cos y^2, \quad b = 2xy + \sin y^2 \quad \text{και}$$
$$c = \cos y^2(2y + 4x^2y^2) + x^2\sin y^2 + 2xy(x^2 + \cos y^2 \sin y^2)$$

Τότε $a_x = b_y = 2x + 2y\cos y^2$ και $h = k = 2x$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \phi_y = x^2 + 2xy\cos y^2 \quad \text{και άρα} \quad \phi = x^2y + x\sin y^2 + g(x) \\ \phi_x = 2xy + \sin y^2 \quad \text{και άρα} \quad \phi = x^2y + x\sin y^2 + h(x) \end{array}\right\} \phi(x,y) = x^2y + x\sin y^2 + \phi_o$$

όπου ϕ_o σταθερά και με το μετασχηματισμό (3.2.8)

$$u(x,y) = v(x,y)\, e^{-(x^2y + x\sin y^2 + \phi_o)} \qquad \text{με} \qquad v_{xy} - 2xv = 0.$$

Περίπτωση III:

Έστω ότι η (3.2.1) μπορεί να μειωθεί στην εξίσωση $v_{xy}+\lambda v=0$ όπου λ σταθερά, μέσω του ισοδύναμου μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} &v = e^{\phi(x,y)}u, \quad \phi(x,y)=\phi(\bar{x},\bar{y}) \\ &\bar{x} = x \\ &\bar{y} = y \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Τότε έχουμε ότι

$$u_x=(v_x-v\phi_x)e^{-\phi(x,y)}, \qquad u_y=(v_y-v\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$
$$u_{xy}=(v_{xy}-v_x\phi_y-v_y\phi_x-v\phi_{xy}+v\phi_x\phi_y)e^{-\phi(x,y)}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.2.1) λαμβάνουμε ότι

$$[\, v_{xy}+(a-\phi_y)v_x+(b-\phi_x)v_y+(-\phi_{xy}+\phi_x\phi_y-a\phi_x-b\phi_y+c)v \,]\, e^{-\phi(x,y)}=0$$

Επομένως η (3.2.1) μειώνεται στην $v_{xy}+\lambda v=0$ αν και μονό αν

$$\begin{aligned} a-\phi_y&=0 \\ b-\phi_x&=0 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

και

$$\phi_{xy}-\phi_x\phi_y+a\phi_x+b\phi_y-c=-\lambda \tag{3.2.15}$$

Το σύστημα (3.2.14) είναι σύστημα δυο εξισώσεων με μια άγνωστη συνάρτηση $\phi(x,y)$ και αφού $\phi(x,y)$ συνεχής έχουμε ότι $\phi_{xy}=\phi_{yx}$. Άρα παίρνουμε ότι

$$a_x=b_y \tag{3.2.16}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.2.16), η (3.2.15) γράφεται ως

$$a_x+ab-c=-\lambda$$

ή

$$b_y+ab-c=-\lambda$$

Επομένως αφού οι συναρτήσεις h, k του Laplace είναι $h = a_x + ab - c$ και $k = b_y + ab - c$ έπεται ότι

$$h = k = -\lambda$$

Αντίστροφα εάν $h = k = -\lambda$ θεωρούμε τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσης (3.2.1)

$$\begin{aligned} u &= \sigma(x,y)\, v(\bar{x},\bar{y}), \quad \sigma(x,y) \neq 0 \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \end{aligned}$$

Τότε παραγωγίζοντας την $u(x,y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_x &= \sigma_x v + \sigma v_x \\ u_y &= \sigma_y v + \sigma v_y \\ u_{xy} &= \sigma_{xy} v + \sigma_y v_x + \sigma_x v_y + \sigma v_{xy} \end{aligned}$$

Άρα η (3.2.1) γίνεται

$$\sigma v_{xy} + (a\sigma + \sigma_y) v_x + (b\sigma + \sigma_x) v_y + (\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma) v = 0$$

Για την περίπτωση όπου $v_{xy} + \lambda v = 0$ έχουμε

$$a\sigma + \sigma_y = 0 \tag{3.2.17a}$$

$$b\sigma + \sigma_x = 0 \tag{3.2.17b}$$

$$\sigma_{xy} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma = \sigma\lambda \tag{3.2.17c}$$

Από την (3.2.17a) έχουμε $\sigma = f(x) e^{-\int a dy}$ και από την (3.2.17b) έχουμε $\sigma = g(y) e^{-\int b dx}$ άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ όπου $\phi_y = a$ και $\phi_x = b$.
Η $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ ικανοποιεί την (3.2.17c) αφού $\sigma_x = -b\sigma$ άρα $\sigma_{xy} = -\phi_{xy}\sigma + ab\sigma$ και έτσι αντικαθιστώντας στην (3.2.17c) έχουμε $-\phi_{xy}\sigma + ab\sigma - ab\sigma - ab\sigma + c\sigma = -\phi_{xy}\sigma - ab\sigma + c\sigma$.

Έχουμε ότι $h = k$ και έστω $h = k = -\lambda$. Τότε έπεται ότι $-\phi_{xy} - ab + c = \lambda$

Άρα $\sigma = e^{-\phi(x,y)}$ και αν $h = k = -\lambda$ με τον μετασχηματισμό

$$u = v(\bar{x}, \bar{y})\, e^{-\phi(x,y)}$$
$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = y$$

η (3.2.1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση $v_{xy} + \lambda v = 0$.

Παράδειγμα 5. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = -\sin y, \quad b = \cos x \quad \text{και} \quad c = -\sin y \cos x + \lambda$$

όπου λ σταθερά. Τότε $a_x = b_y = 0$ και $h = k = \lambda$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \phi_y = -\sin y \quad \text{και άρα} \quad \phi = \cos y + g(x) \\ \phi_x = \cos x \quad \text{και άρα} \quad \phi = \sin x + h(x) \end{array}\right\} \phi(x,y) = \sin x + \cos y + \phi_o$$

όπου ϕ_o σταθερά και με το μετασχηματισμό (3.2.13)

$$u(x,y) = v(x,y)\, e^{-(\sin x + \cos y + \phi_o)} \qquad \text{με} \qquad v_{xy} - \lambda v = 0.$$

Περίπτωση IV:

Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{L} = [\,\mathrm{D}_x + \alpha(x,y)\,][\,\mathrm{D}_y + \beta(x,y)\,] \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad h = 0 \tag{3.2.18}$$

(με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το

$$\mathrm{L} = [\,\mathrm{D}_y + \beta(x,y)\,][\,\mathrm{D}_x + \alpha(x,y)\,] \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad k = 0\ )$$

Έστω ότι $\mathrm{L} = [\,\mathrm{D}_x{+}\alpha(x,y)\,][\,\mathrm{D}_y{+}\beta(x,y)\,]$ τότε $\mathrm{L}u = 0$ άρα $[\,\mathrm{D}_x{+}\alpha(x,y)\,][\,u_y{+}\beta u\,] = 0$ οπότε $u_{xy} + \beta_x u + \alpha u_y + \alpha\beta u = 0$ και έχουμε για τους συντελεστές a, b, c της (3.2.1) ότι $a = \beta,\ b = \alpha,\ c = \beta_x{+}\alpha\beta$. Επομένως αφού $h = a_x{+}ab{-}c$ έχουμε $h = \beta_x{+}\alpha\beta{-}\beta_x{-}\alpha\beta = 0$ και $k = b_y + ab - c = \alpha_y - \beta_x \neq 0$ εν γένει.

Αντίστροφα εάν $h = a_x + ab - c = 0$ τότε $c = a_x + ab$ και ο τελεστής $\mathrm{L} = \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y + a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c$ γίνεται $\mathrm{L} = \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y + a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + a_x + ab$ οπότε $\mathrm{L} = b(\mathrm{D}_y + a) + \mathrm{D}_x(\mathrm{D}_y + a)$. Άρα παρογοντοποιείται ως

$$\mathrm{L} = [\,\mathrm{D}_x + b(x,y)\,][\,\mathrm{D}_y + a(x,y)\,]$$

Σημείωση 2. Αν $h = 0$ τότε από $\mathrm{L}u = [\,\mathrm{D}_x + b(x,y)\,][\,\mathrm{D}_y + a(x,y)\,]u$ προκύπτει ότι $\mathrm{L}u = [\,\mathrm{D}_x + b(x,y)\,][\,u_y + au\,]$. Θέτοντας $v = u_y + au$ προκύπτουν δυο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

$$u_y + au = 0 \tag{3.2.19}$$

και

$$v_x + bv = 0 \tag{3.2.20}$$

Η λύση του (3.2.20) είναι

$$v = f(y)e^{-\int b dx}$$

και επομένως έχουμε ότι

$$u_y + au = f(y)e^{-\int b dx}$$

του οποίου η λύση δίνεται από την

$$u = [\, g(x) + \int f(y) e^{\int a dy - b dx} dy \,]\, e^{-\int a dy} \tag{3.2.21}$$

Παρομοίως από αν $k = 0$ λαμβάνουμε

$$u = [\, f(y) + \int g(x) e^{\int b dx - a dy} dx \,]\, e^{-\int b dx} \tag{3.2.22}$$

Παράδειγμα 6. Έστω ότι a, b, c οι συντελεστές της (3.2.1) τέτοιοι ώστε

$$a = x^2 y, \quad b = \frac{2}{x} \quad \text{και} \quad c = 4xy$$

Τότε $h = a_x + ab - c = 0$ και $k = b_y + ab - c = -2xy \neq 0$ για $y \neq 0$. Επομένως

$$\mathrm{L} = [\, \mathrm{D}_x + \frac{2}{x} \,][\, \mathrm{D}_y + x^2 y \,] \quad \text{με} \quad \mathrm{L}u = 0$$

και άρα από την (3.2.21) έχουμε ότι

$$u = [\, g(x) + \int f(y) \frac{1}{x^2} e^{\frac{x^2 y^2}{2}} dy \,]\, e^{-\frac{x^2 y^2}{2}}$$

όπου $g(x)$, $f(y)$ αυθαίρετες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 7. Έστω η εξίσωση του Darboux

$$u_{xy} + \frac{\delta u_y}{x - y} = 0 \quad \text{όπου} \quad \delta = \text{σταθερά}$$

Τότε έχουμε

$$a = 0, \quad b = \frac{\delta}{x - y} \quad \text{και} \quad c = 0.$$

Επομένως $h = a_x + ab - c = 0$ και $k = b_y + ab - c = \frac{\delta}{(x-y)^2} \neq 0$, άρα από την (3.2.21) έχουμε ότι

$$u = g(x) + \int f(y)(x - y)^{-\delta} dy$$

όπου $g(x)$, $f(y)$ αυθαίρετες συναρτήσεις.

4 Επέκταση αναλλοίωτων συναρτήσεων Laplace

Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο οι συναρτήσεις (3.1.11) παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από το γραμμικό μετασχηματισμό (3.1.2). Ωστόσο παραμένει το ερώτημα κατά πόσο είναι οι μόνες αναλλοίωτες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο μετασχηματισμό (3.1.2). Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε περιληπτικά στην ανεύρεση όλων των συναρτήσεων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό και θα οδηγηθούμε στην ανεύρεση βάσης η οποία παράγει όλες τις αναλλοίωτες συναρτήσεις.

4.1 Αναλλοίωτες συναρτήσεις δευτέρας τάξης

Μελετώντας το πρόβλημα της ομαδοποίησης των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων ο Ovsyannikov [3] ανακάλυψε δυο αναλλοίωτες συναρτήσεις οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από οποιοδήποτε ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$p = \frac{k}{h} \qquad q = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln|\,h|}{\partial x \partial y}$$

Τότε η μελέτη των αναλλοίωτων συναρτήσεων με τη βοήθεια των απειροστών μετασχηματισμών και των γεννήτορων που τις παράγουν δεν ήταν ακόμη γνωστή, επομένως το πρόβλημα της εύρεσης όλων των αναλλοίωτων συναρτήσεων δεν είχε ακόμα επιλυθεί.

Πρόσφατα ο N.H Ibragimov [7] κατάφερε να επιλύσει αυτό το πρόβλημα βρίσκοντας βάση η οποία παράγει όλες τις αναλλοίωτες συναρτήσεις των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων. Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία όπως αυτή του κεφαλαίου 3 θεωρούμε τους ισοδύναμους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y \\ \bar{u} &= u - \epsilon\, un + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon\,\zeta(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{u} &= u \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

και

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y + \epsilon\,\theta(y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \bar{u} &= u \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Έστω η συνάρτηση $J = J(x, y, a, b, c, a_x, a_y, \dots)$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (4.1.1), (4.1.2) και (4.1.3). Παρατηρούμε ότι από τις συναρτήσεις Laplace $h = a_x + ab - c$ και $k = b_y + ab - c$, οι συναρτήσεις a, b, c καθώς και οι παράγωγοι τους ως προς x και y αποτελούν συναρτήσεις των h και k και των παραγώγων τους ως προς x και y. Θεωρούμε λοιπόν την πιο γενική συνάρτηση $J = J(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y, h_{xx}, h_{xy}, h_{yy}, k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}, \dots)$ ότι παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (4.1.1), (4.1.2) και (4.1.3). Από το μετασχηματισμό (4.1.2) σε συνδιασμό με τους μετασχηματισμούς των συντελεστών a, b, c που προκύπτουν οδηγούμαστε στο γεννήτορα

$$X = -\zeta(x)\frac{\partial}{\partial x} + \zeta'(x)b\frac{\partial}{\partial b} + \zeta'(x)c\frac{\partial}{\partial c} \tag{4.1.4}$$

Επεκτείνουμε το γεννήτορα (4.1.4) ως προς a_x και b_y και λαμβάνουμε

$$X = -\zeta(x)\frac{\partial}{\partial x} + \zeta'(x)\big[b\frac{\partial}{\partial b} + c\frac{\partial}{\partial c} + a_x\frac{\partial}{\partial a_x} + b_y\frac{\partial}{\partial b_y}\big] \tag{4.1.5}$$

Έχοντας υπόψη ότι $h = a_x + ab - c$ και $k = b_y + ab - c$, ο γεννήτορας (4.1.5) μπορεί να γραφτεί ως

$$X = -\zeta(x)\frac{\partial}{\partial x} + \zeta'(x)\big[h\frac{\partial}{\partial h} + k\frac{\partial}{\partial k}\big] \tag{4.1.6}$$

Παρομοίως από το μετασχηματισμό (4.1.3) προκύπτει ο γεννήτορας

$$Y = -\theta(y)\frac{\partial}{\partial y} + \theta'(y)\big[h\frac{\partial}{\partial h} + k\frac{\partial}{\partial k}\big] \tag{4.1.7}$$

Ακολούθως επεκτείνουμε τους γεννήτορες (4.1.6) και (4.1.7) ως προς τις 2ας τάξης παραγώγους των h και k. Οι γεννήτορες που προκύπτουν επιδρώντας στη συνάρτηση $J = J(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y, h_{xx}, h_{xy}, h_{yy}, k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}, \dots)$, αφού οι συναρτήσεις $\zeta(x)$ και $\theta(y)$ καθώς και οι παράγωγοι τους είναι αυθαίρετες συναρτήσεις, μας δίνουν δυο συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Η λύση αυτών των συστημάτων οδηγεί στην εύρεση της 2ας τάξης αναλλοίωτων συναρτήσεων της υπερβολικής διαφορικής εξίσωσης (3.1.1)

$$\begin{gathered} p = \frac{k}{h}\,, \qquad q = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln|\,h|}{\partial x \partial y}\,, \qquad \tilde{q} = \frac{1}{k}\frac{\partial^2 \ln|\,k|}{\partial x \partial y} \\ N = \frac{1}{p_x}\frac{\partial}{\partial x}\ln|\frac{p_x}{h}|\,, \qquad H = \frac{1}{p_y}\frac{\partial}{\partial y}\ln|\frac{p_y}{h}|\,, \qquad I = \frac{p_x p_y}{h} \end{gathered} \tag{4.1.8}$$

4.2 Βάση αναλλοίωτων συναρτήσεων υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων

Από τη θεωρία των συμμετρικών ομάδων Lie έχουμε ότι για κάθε ομάδα μετασχηματισμών ορισμένη κάτω από τους απειροστούς γεννήτορες

$$X_\nu = \xi^i_\nu(\vec{x}, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha_\nu(\vec{x}, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

με n ανεξάρτητες μεταβλητές $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ υπάρχουν n αναλλοίωτοι διαφορικοί τελεστές

$$\mathcal{D} = f^i D_i \tag{4.2.1}$$

όπου οι συντελεστές $f^i = f^i(\vec{x}, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots)$ υπολογίζονται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$X_\nu(f^i) = f^j D_j({\xi^i}_\nu), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Στη περίπτωσή μας οι γεννήτορες X_ν είναι οι γεννήτορες (4.1.6) και (4.1.7). Επομένως ο τελεστής (4.2.1) γράφεται ως

$$\mathcal{D} = fD_x + gD_y$$

και άρα

$$X(f) = fD_x(\zeta(x)) + gD_y(\zeta(x)) = -\zeta'(x)f, \qquad X(g) = 0$$
$$Y(g) = fD_x(\theta(y)) + gD_y(\theta(y)) = -\theta'(y)g, \qquad Y(f) = 0$$

Θεωρούμε ότι $f = f(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y)$, $g = g(x, y, h, k, h_x, h_y, k_x, k_y)$ και επεκτείνοντας τους γεννήτορες X και Y λαμβάνουμε ότι

$$f = \frac{1}{p_x}F(p, I) \qquad \text{και} \qquad g = \frac{1}{p_y}G(p, I)$$

όπου $F(p, I)$ και $G(p, I)$ αυθαίρετες συναρτήσεις με $p = \frac{h}{k}$ και $I = \frac{p_x p_y}{h}$.

Επομένως

$$\mathcal{D} = \frac{1}{p_x}F(p, I)D_x + \frac{1}{p_y}G(p, I)D_y$$

Θέτοντας $F = 1,\ G = 0$ και $F = 0,\ G = 1$ λαμβάνουμε τους διαφορικούς τελεστές

$$\mathcal{D}_x = \frac{1}{p_x}D_x, \qquad \mathcal{D}_y = \frac{1}{p_y}D_y$$

οι οποίοι παράγουν τις αναλλοίωτες συναρτήσεις ανωτέρας τάξης. Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.1. *Η βάση των αναλλοίωτων συναρτήσεων οποιασδήποτε τάξης της υπερβολικής διαφορικής εξίσωσης*

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0$$

αποτελείται από τις αναλλοίωτες συναρτήσεις

$$p = \frac{k}{h}\,, \qquad I = \frac{p_x p_y}{h}\,, \qquad q = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln|\,h|}{\partial x \partial y}\,, \qquad \tilde{q} = \frac{1}{k}\frac{\partial^2 \ln|\,k|}{\partial x \partial y}$$

ή εναλλακτικά από τις αναλλοίωτες συναρτήσεις

$$p = \frac{k}{h}\,, \qquad I = \frac{p_x p_y}{h}\,, \qquad N = \frac{1}{p_x}\frac{\partial}{\partial x}\ln|\frac{p_x}{h}|\,, \qquad q = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \ln|\,h|}{\partial x \partial y}$$

5 Υπολογισμοί παραστάσεων με χρήση του αλγεβρικού πακέτου MAPLE

Σε αυτό κεφάλαιο παρουσιάζεται ο κώδικας γραμμένος στη MAPLE ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του απειροστού γεννήτορα 3.1.9 του μετασχηματισμού 3.1.8.

5.1 Υπολογισμός απειροστού γεννήτορα επέκτασης 1ης τάξης

Πρώτα ορίζουμε τις εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές με την εντολή *differential_ring*:

```
> with (diffalg):
> R := differential_ring (derivations=[x,y], ranking=[f,n,a,b,c],
> notation=diff);
```

$$R := PDE\_ring$$

Ακολούθως ορίζουμε τους διαφορικούς τελεστές $\tilde{\mathrm{D}}_x$ (D1) και $\tilde{\mathrm{D}}_y$ (D2) των γεννήτορων επέκτασης του μετασχηματισμού (3.1.8):

```
> D1 := (f -> diff(f,x) + differentiate(a,x,R)*diff(f,a)+
> differentiate(b,x,R)*diff(f,b) + differentiate(c,x,R)*diff(f,c) +
> differentiate(a,x,x,R)*diff(f,a[x]) +
> differentiate(a,y,x,R)*diff(f,a[y]) +
> differentiate(b,x,x,R)*diff(f,b[x]) +
> differentiate(b,y,x,R)*diff(f,b[y]) +
> differentiate(c,x,x,R)*diff(f,c[x]) +
> differentiate(c,y,x,R)*diff(f,c[y]));
```

```
> D2 := (f -> diff(f,y) + differentiate(a,y,R)*diff(f,a)+
> differentiate(b,y,R)*diff(f,b) + differentiate(c,y,R)*diff(f,c) +
> differentiate(a,x,y,R)*diff(f,a[x]) +
> differentiate(a,y,y,R)*diff(f,a[y]) +
> differentiate(b,x,y,R)*diff(f,b[x]) +
> differentiate(b,y,y,R)*diff(f,b[y]) +
> differentiate(c,x,y,R)*diff(f,c[x]) +
> differentiate(c,y,y,R)*diff(f,c[y]));
```

$$\begin{aligned}\mathrm{D1} := f \to (\tfrac{d}{dx}\, f) &+ \mathrm{differentiate}(a,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{da}\, f) + \mathrm{differentiate}(b,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{db}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(c,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{dc}\, f) + \mathrm{differentiate}(a,\, x,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{da_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(a,\, y,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{da_y}\, f) + \mathrm{differentiate}(b,\, x,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{db_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(b,\, y,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{db_y}\, f) + \mathrm{differentiate}(c,\, x,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{dc_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(c,\, y,\, x,\, R)\,(\tfrac{d}{dc_y}\, f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D2} := f \to (\tfrac{d}{dy}\, f) &+ \mathrm{differentiate}(a,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{da}\, f) + \mathrm{differentiate}(b,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{db}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(c,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{dc}\, f) + \mathrm{differentiate}(a,\, x,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{da_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(a,\, y,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{da_y}\, f) + \mathrm{differentiate}(b,\, x,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{db_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(b,\, y,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{db_y}\, f) + \mathrm{differentiate}(c,\, x,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{dc_x}\, f)\\ &+ \mathrm{differentiate}(c,\, y,\, y,\, R)\,(\tfrac{d}{dc_y}\, f)\end{aligned}$$

Αναθέτουμε στα μ_1, μ_2, μ_3, ζ_1, ζ_2 τις αντίστοιχες παραστάσεις του μετασχηματισμού (3.1.6):

```
> μ[1] := differentiate(n,y,R);
> μ[2] := differentiate(n,x,R);
> μ[3] := differentiate(n,x,y,R) + a*differentiate(n,x,R) +
> b*differentiate(n,y,R);
> ζ[1] := 0;
> ζ[2] := 0;
```

$$\mu_1 := \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_2 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$

$$\zeta_1 := 0$$

$$\zeta_2 := 0$$

Υπολογίζουμε τη δράση των τελεστών $\tilde{\mathrm{D}}_x$ και $\tilde{\mathrm{D}}_y$ στα μ_1, μ_2, μ_3, ζ_1, ζ_2:

```
> D1(μ[1]);
> D1(μ[2]);
> D1(μ[3]);
> D1(ζ[1]);
> D1(ζ[2]);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{a}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{b}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$

$$0$$

$$0$$

```
> D2(μ[1]);
> D2(μ[2]);
> D2(μ[3]);
> D2(ζ[1]);
> D2(ζ[2]);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+a\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+b\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{a}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{b}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$

$$0$$

$$0$$

και υπολογίζουμε τους γεννήτορες επέκτασης των συντελεστών a, b, c του μετασχηματισμού (3.1.8):

```
> μ[1,x] := D1(μ[1]) - differentiate(a,x,R)*D1(ζ[1]) -
> differentiate(a,y,R)*D1(ζ[2]);
> μ[1,y] := D2(μ[1]) - differentiate(a,x,R)*D2(ζ[1]) -
> differentiate(a,y,R)*D2(ζ[2]);
> μ[2,x] := D1(μ[2]) - differentiate(b,x,R)*D1(ζ[1]) -
> differentiate(b,y,R)*D1(ζ[2]);
> μ[2,y] := D2(μ[2]) - differentiate(b,x,R)*D2(ζ[1]) -
> differentiate(b,y,R)*D2(ζ[2]);
> μ[3,x] := D1(μ[3]) - differentiate(c,x,R)*D1(ζ[1]) -
> differentiate(c,y,R)*D1(ζ[2]);
> μ[3,y] := D2(μ[3]) - differentiate(c,x,R)*D2(ζ[1]) -
> differentiate(c,y,R)*D2(ζ[2]);
```

$$\mu_1^x := \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_1^y := \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_2^x := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_2^y := \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$\mu_3^x := \left(\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+b\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{a}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{b}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$

$$\mu_3^y := \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+a\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+b\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{a}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{b}(x,\,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)\right)$$

```
> denote(μ[1,x],jet,R);
> denote(μ[1,y],jet,R);
> denote(μ[2,x],jet,R);
> denote(μ[2,y],jet,R);
> denote(μ[3,x],jet,R);
> denote(μ[3,y],jet,R);
```

$$n_{xy}$$

$$n_{yy}$$

$$n_{xx}$$

$$n_{xy}$$

$$n_{xxy} + a\,n_{xx} + b\,n_{xy} + a_x\,n_x + b_x\,n_y$$

$$n_{xyy} + a\,n_{xy} + b\,n_{yy} + a_y\,n_x + b_y\,n_y$$

Ορίζουμε τώρα τις ανεξάρτητες μεταβλητές της μεταβλήτής $J = J(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$:

```
> with (diffalg):
> Q := differential_ring
> (derivations=[a,b,c,a[x],a[y],b[x],b[y],c[x],c[y]], ranking=[J],
> notation=diff);
```

$$Q := PDE\_ring$$

και ορίζουμε τούς απειροστούς γεννήτορες Γ (Z) και $\Gamma^{(1)}$ (Z1) των μετασχηματισμών (3.1.6) και (3.1.8) αντίστοιχα:

```
> Z := (f -> -n*diff(f,u)+μ[1]*differentiate(f,a,Q) +
> μ[2]*differentiate(f,b,Q) + μ[3]*differentiate(f,c,Q));
```

$$Z := f \to -n\,(\tfrac{d}{du}\,f) + \mu_1\,\mathrm{differentiate}(f,\,a,\,Q) + \mu_2\,\mathrm{differentiate}(f,\,b,\,Q) + \mu_3\,\mathrm{differentiate}(f,\,c,\,Q)$$

```
> Z1 := (f -> Z(f) + μ[1]*differentiate(f,a,Q) + μ[2]*differentiate(f,b,Q)
> + μ[3]*differentiate(f,c,Q) + μ[1,x]*differentiate(f,a[x],Q)
> + μ[1,y]*differentiate(f,a[y],Q) + μ[2,x]*differentiate(f,b[x],Q)
> + μ[2,y]*differentiate(f,b[y],Q) + μ[3,x]*differentiate(f,c[x],Q)
> + μ[3,y]*differentiate(f,c[y],Q));
```

$$
\begin{aligned}
&Z1 := f \to \mathrm{Z}(f)\\
&+ \mu_1 \,\mathrm{differentiate}(f,\, a,\, Q) + \mu_2 \,\mathrm{differentiate}(f,\, b,\, Q) + \mu_3 \,\mathrm{differentiate}(f,\, c,\, Q)\\
&+ \mu_1^x \,\mathrm{differentiate}(f,\, a_x,\, Q) + \mu_1^y \,\mathrm{differentiate}(f,\, a_y,\, Q)\\
&+ \mu_2^x \,\mathrm{differentiate}(f,\, b_x,\, Q) + \mu_2^y \,\mathrm{differentiate}(f,\, b_y,\, Q)\\
&+ \mu_3^x \,\mathrm{differentiate}(f,\, c_x,\, Q) + \mu_3^y \,\mathrm{differentiate}(f,\, c_y,\, Q)
\end{aligned}
$$

Δρώντας ο γεννήτορας $\Gamma^{(1)}$ πάνω στη $J = J(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$ δίνει:

```
> Z1(J);
```

$$
\begin{aligned}
&(\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial a}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial b}\,J)\\
&+ ((\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y)) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,y)) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,y)))\,(\tfrac{\partial}{\partial c}\,J)\\
&+ (\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial a_x}\,J) + (\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial a_y}\,J) + (\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial b_x}\,J)\\
&+ (\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial b_y}\,J) + ((\tfrac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,y)) + a\,(\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,y)) + b\,(\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\\
&+ (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{a}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,y)) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{b}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,y)))(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + ((\tfrac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\\
&+ a\,(\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,y)) + b\,(\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,y)) + (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{a}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,y))\\
&+ (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{b}(x,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,y)))(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J)
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε $a1, ..., a7$ τις μερικές παραγώγους μέχρι 2ας τάξης της μεταβλητής $n(x, y)$:

```
> a1 := differentiate(n,x,R);

> a2 := differentiate(n,y,R);

> a3 := differentiate(n,x,y,R);

> a4 := differentiate(n,x,x,R);

> a5 := differentiate(n,y,y,R);

> a6 := differentiate(n,x,x,y,R);

> a7 := differentiate(n,x,y,y,R);
```

$$a1 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a2 := \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a3 := \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a4 := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a5 := \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a6 := \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

$$a7 := \frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)$$

και εκφράζουμε το γεννήτορα $\Gamma^{(1)}$ συνατρήσει των μερικών παραγώγων της $n(x,y)$:

```
> Z1(J) := collect(collect(collect(collect(collect(collect(collect(Z1(J),
> a1), a2), a3), a4), a5), a6), a7);
```

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z1}(J) :=\, & ((\tfrac{\partial}{\partial a_y}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J))\,(\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)) + ((\tfrac{\partial}{\partial b_x}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J))\,(\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y)) \\
& + ((\tfrac{\partial}{\partial b_y}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial a_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J))\,(\tfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)) \\
& + ((\tfrac{\partial}{\partial a}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{b}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{b}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J))\,(\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{n}(x,\,y)) \\
& + ((\tfrac{\partial}{\partial b}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{a}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{a}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J))\,(\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y)) \\
& + (\tfrac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,\mathrm{n}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\,\mathrm{n}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J)
\end{aligned}$$

Τέλος εξισώνουμε τους συντελεστές των παραγώγων της $n(x,y)$ με μηδέν και παίρνουμε τις μερικές διαφορικές εξισώσεις των οποίων οι λύσεις οδηγούν στην εύρεση των αναλλοίωτων συναρτήσεων του Laplace:

```
> frontend(coeff, [Z1(J), a1])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a2])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a3])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a4])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a5])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a6])=0;

> frontend(coeff, [Z1(J), a7])=0;
```

$$(\tfrac{\partial}{\partial b}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{a}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{a}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J) = 0$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial a}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{b}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{b}(x,\,y))\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J) = 0$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial b_y}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial a_x}\,J) + (\tfrac{\partial}{\partial c}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J) = 0$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial b_x}\,J) + a\,(\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J) = 0$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial a_y}\,J) + b\,(\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J) = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial c_x}\,J = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial c_y}\,J = 0$$

Αναφορές

[1] N.H. IBRAGIMOV, *Equivalence groups and invariants of linear and non-linear equations*, Archives of ALGA, Vol. 1, 2004.

[2] L. DRESNER, *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999.

[3] L.V. OVSIANNIKOV, *Group analysis of differential equations*, μετάφραση από W.F. Ames, Academic Press, New York, 1982.

[4] P.S. LAPLACE, *Recherhes sur le calcul integral aux differences partielles, Memoires de l' Academic Royale des Sciences de Paris*, 177/77, pp. 341-402; ανατύπωση: Laplace's *Œuvres completes*, Vol. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1893, pp. 5-68; Αγγλική μετάφραση, New York, 1966.

[5] E. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ, *Συμμετρίες Lie - Λύσεις ομοιότητας μιας γενικής εξίσωσης θερμότητας*, Ανεξάρτητη Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, 2002.

[6] N.H. IBRAGIMOV, *Laplace Type Invariants for Parabolic Equations*, Nonlinear Dynamics 28, No. 2, 125-133, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002.

[7] N.H. IBRAGIMOV, *Invariants of Hyperbolic Equations: Solution of the Laplace Problem*, Journal of Applied Mathematics and Technical Physics, Vol. 45, No. 2, pp. 158-166, 2004.

[8] S. LIE, *On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals*, Arch. Math VI(3), 1881, 328-368 (στα Γερμανικά). Επανέκδοση S. Lie, Gesammelte Abhandlundgen, Vol. 3, paper XXXV. (Αγγλική μετάφραση, CRC handbook of Lie Group Analysis of differential equations, Vol. 2, 473-499, Boca Raton, Florida, CRC Press, 1995).

[9] N.H. IBRAGIMOV, *A practical course in Differential Equations and Mathematical Modeling*, Third edition, ALGA Publications, 2006.

[10] Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης.

[11] .

[12] P. FLYNN, *Formatting information, A beginner's introduction to typesetting with LaTeX* , Silmaril Consultants, 2005.

[13] T. OETIKER et al., *The (Not So) Short Guide to LaTeX 2_ε: LaTeX 2_ε in 131 Minutes*, Technical report, 2001.
URL: `http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/`

[14] M. DOWNES, *Short Math Guide for LaTeX* , American Mathematical Society, Version 1.07, 2000.