ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΜΑΣ 299

Συμμετρίες Lie - Λύσεις ομοιότητας μιας γενικής εξίσωσης θερμότητας

Έλενα Δημητρίου (Α.Φ.Τ. 814236)

Λευκωσία, Μάιος 2002

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή σελ.1

2. Ομάδες Μετασχηματισμών Lie (Groups of Lie Transformations) σελ.2

2.1 Ομάδες (Groups) σελ.2

2.2 Ομάδες Μετασχηματισμών Lie σελ.2

2.3 Απειροστοί Μετασχηματισμοί (Infinitesimal Transformations) σελ.4

2.4 Αναλλοίωτες Συναρτήσεις (Invariant Functions) σελ.4

2.5 Αναλλοίωτες Μ.Δ.Ε. (Invariant P.D.E.) σελ.4

2.6 Λύσεις Ομοιότητας (Similarity Solutions) σελ.6

3. Συμμετρίες Lie-Λύσεις Ομοιότητας της $G(u)u_t = (F(u)u_x)_x$ σελ.8

3.1 Εφαρμογές σελ.8

3.2 Υπολογισμός των συμμετριών Lie σελ.8

3.3 Λύσεις Ομοιότητας σελ.13

3.4 Πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί σελ.16

Βιβλιογραφία σελ.17

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μεθόδοι μετασχηματισμών είναι ίσως ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία που είναι διαθέσιμα στην περιοχή των μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (Μ.Δ.Ε.). Ενώ δεν υπάρχει γενική θεωρία για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων, με τις κατάλληλες αλλαγές των μεταβλητών οδηγούμαστε σε αρκετές ειδικές περιπτώσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της Μ.Δ.Ε. Οι τοπικοί μετασχηματισμοί είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται περισσότερο. Αυτοί είναι οι μετασχηματισμοί στο χώρο των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών μιας Μ.Δ.Ε. Ίσως οι πιο χρήσιμοι τοπικοί μετασχηματισμοί των Μ.Δ.Ε. είναι αυτοί που σχηματίζουν μια συνεχή ομάδα μετασχηματισμών Lie και αφήνουν την εξίσωση αναλλοίωτη. Οι συμμετρίες αυτών των Μ.Δ.Ε. χρησιμοποιούνται για την εύρεση νέων λύσεων είτε απευθείας με τη χρήση γνωστών λύσεων, είτε μέσω των λύσεων ομοιότητας. Ορίζουμε τις λύσεις ομοιότητας να είναι οι μετασχηματισμοί που μειώνουν τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών μιας Μ.Δ.Ε. κατά ένα.

Η κλασσική μέθοδος εύρεσης συμμετριών Lie, προκύπτει πρώτα με την εύρεση των απειροστών μετασχηματισμών, χρησιμοποιώντας ως πλεονέκτημα τη γραμμικότητά τους και μετά επεκτείνοντας τους σε ομάδες πεπερασμένων μετασχηματισμών. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται εύκολα και έχει καθιερωθεί τα τελευταία χρόνια. Για περισσότερες πληροφορίες για τη μέθοδο δες, για παράδειγμα, βιβλία [1, 2, 3]. Σ'αυτήν την εργασία, θα υπολογίσουμε τις συμμετρίες Lie της εξίσωσης:

$$G(u)u_t = (F(u)u_x)_x \tag{1.1}$$

όπου $F(u) \neq 0$, και ακολούθως με τη χρήση των συμμετριών τις εξίσωσης (1.1), θα κατασκευάσουμε όλες τις πιθανές λύσεις ομοιότητας της.

Στο Κεφάλαιο 2 θα δώσουμε συνοπτικά τη θεωρία. Αναλυτικά, θα ορίσουμε τις ομάδες μετασχηματισμών Lie, καθώς και τους απειροστούς μετασχηματισμούς. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε πότε μια Μ.Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη μέσω των απειροστών μετασχηματισμών και πώς με τη χρήση των συμμετριών Lie οδηγούμαστε στην κατασκευή μετασχηματισμών, των λύσεων ομοιότητας, οι οποίοι μετατρέπουν μια Μ.Δ.Ε. δύο ανεξάρτητων μεταβλητών σε Σ.Δ.Ε.

Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 3 θα υπολογίσουμε τις συμμετρίες Lie της εξίσωσης (1.1) και θα δώσουμε όλες τις πιθανές λύσεις ομοιότητας παραθέτοντας κάποια παραδείγματα όπου δίνονται οι μορφές που παίρνει η Μ.Δ.Ε. (1.1) με τη χρήση κάποιων λύσεων ομοιότητας, καθώς και ένα παράδειγμα στο οποίο ο απειροστός μετασχηματισμός μετατρέπεται σε πεπερασμένο μετασχηματισμό. Επίσης θα αναφέρουμε μερικές από τις εφαρμογές της εξίσωσης (1.1).

2 ΟΜΑΔΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LIE

2.1 Ομάδες (Groups)

Ορισμός: Ένα ζεύγος $(G, *)$ που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο G και μια διμελή πράξη $*$ πάνω σ'αυτή καλείται *ομάδα*, αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) Το σύνολο G είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$

(ii) Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική

(iii) Υπάρχει κάποιο στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε

$$g * e = e * g = g \quad \text{για κάθε } g \in G$$

Το στοιχείο αυτό καλείται *ουδέτερο* στοιχείο της ομάδας.

(iv) Αν $g \in G$, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $g_1 \in G$ τέτοιο ώστε

$$g * g_1 = g_1 * g = e$$

Το στοιχείο g_1 καλείται *συμμετρικό* του g ως προς την πράξη $*$.

2.2 Ομάδες Μετασχηματισμών Lie (Lie Groups of Transformation)

Με τον όρο μετασχηματισμό του χώρου, εννούμε μια συνάρτηση $T : R^3 \to R^3$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x,t,u) \\ t' &= \varphi(x,t,u) \\ u' &= \omega(x,t,u) \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου οι ψ, φ και ω είναι γνωστές συναρτήσεις.

Γεωμετρικά, η T απεικονίζει το σημείο (x,t,u) σε ένα άλλο σημείο (x',t',u') στο ίδιο επίπεδο συντεταγμένων. Αν οι εξισώσεις που ορίζουν το μετασχηματισμό T μπορεί να λυθούν ως προς x, t, u τότε προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= \Psi(x',t',u') \\ t &= \Phi(x',t',u') \\ u &= \Omega(x',t',u') \end{aligned}$$

Από τη σύνθεση των δυο αυτών μετασχηματισμών, προκύπτει ο μοναδιαίος μετασχηματισμός I που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ t' &= t \\ u' &= u \end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε μετασχηματισμούς όπου οι συναρτήσεις ψ, φ και ω στις εξισώσεις (2.2) εξαρτώνται και από μια πραγματική παράμετρο, την οποία συμβολίζουμε με ϵ. Θεωρούμε ότι η παράμετρος ϵ μεταβάλλεται συνεχώς σε ένα ανοικτό διάστημα τέτοιο ώστε $|\epsilon| < \epsilon_0$. Το σύνολο των μετασχηματισμών αποτελεί την οικογένεια των μετασχηματισμών T_ϵ, που περιγράφεται από τις

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x,t,u,\epsilon) \\ t' &= \varphi(x,t,u,\epsilon) \\ u' &= \omega(x,t,u,\epsilon) \end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου οι ψ, φ και ω είναι γνωστές αναλυτικές συναρτήσεις στα αντίστοιχα πεδία ορισμών τους.

Ορισμός: Ορίζουμε τις *ομάδες μετασχηματισμών Lie μιας παραμέτρου*, τους μετασχηματισμούς της μορφής (2.3) αν ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες:

(i) $T_0 = I$ ($T_{\epsilon_0} = I$) (ύπαρξη του μοναδιαίου στοιχείου)

(ii) $T_\epsilon^{-1} = T_{\epsilon^{-1}}$ (ύπαρξη του αντίστροφου στοιχείου)

(iii) $T_\gamma(T_\delta T_\epsilon) = (T_\gamma T_\delta)T_\epsilon$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(iv) $T_\delta T_\epsilon = T_{\varphi(\epsilon,\delta)}$ (κλειστότητα)

Κάθε τιμή της παραμέτρου ϵ αντιστοιχεί σε ξεχωριστό μέλος της οικογένειας των μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί T_ϵ ανήκουν στην οικογένεια των μετασχηματισμών μιας παραμέτρου.

Παραδείγματα ομάδων μετασχηματισμών

(a) Μετασχηματισμοί Μεταφοράς

Η ομάδα μεταφοράς περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= x \\ t' &= t+\epsilon \\ u' &= u \end{aligned}$$

όπου $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ και $\varphi(\epsilon,\delta) = \epsilon+\delta$.

(b) Μετασχηματισμοί Περιστροφής

Οι μετασχηματισμοί περιστροφής ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\epsilon - t\sin\epsilon \\ t' &= x\sin\epsilon + t\cos\epsilon \\ u' &= u+\epsilon \end{aligned}$$

όπου $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ και $\varphi(\epsilon,\delta) = \epsilon+\delta$. Οι μετασχηματισμοί αυτού του είδους περιγράφουν μια περιστροφή στο xt επίπεδο κατα μια γωνία ϵ καθώς και μια μεταφορά στη διεύθυνση του u.

(c) Μετασχηματισμοί αλλαγής της κλίμακος

Οι μετασχηματισμοί αλλαγής της κλίμακος περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= x\epsilon \\ t' &= t\epsilon^2 \\ u' &= u \end{aligned}$$

όπου $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon}$ και $\varphi(\epsilon,\delta) = \epsilon\delta$.

2.3 Απειροστοί Μετασχηματισμοί (Infinitesimal Transformation)

Θεωρούμε ότι η τιμή της παραμέτρου ϵ μπορεί να γίνει αρκετά μικρή ώστε να προκύψει ο ταυτοτικός μετασχηματισμός I, δηλαδή θεωρούμε ότι $\epsilon = 0$. Τότε μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor καθ'ένα από τα δεξιά μέλη των σχέσεων που ορίζουν το μετασχηματισμό μιας παραμέτρου T_ϵ, γύρω από το $\epsilon = 0$. Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon X(x,t,u) + O(\epsilon^2) \\ t' &= t + \epsilon T(x,t,u) + O(\epsilon^2) \\ u' &= u + \epsilon U(x,t,u) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου $X = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$, $T = \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$ και $U = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$.

Στις εξισώσεις (2.4) παραλείψαμε τους δευτέρου και μεγαλυτέρου βαθμού όρους του ϵ. Ο πρωτοβάθμιος μετασχηματισμός που προκύπτει είναι γνωστός ως *απειροστός μετασχηματισμός*.

Μπορούμε γνωρίζοντας τους γεννήτορες X, T, U να εντοπίσουμε τη μορφή της αντίστοιχης ομάδας μετασχηματισμών σε πεπερασμένη μορφή των εξισώσεων (2.3), λύνοντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\epsilon} &= X(x',t',u') \\ \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\epsilon} &= T(x',t',u') \\ \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\epsilon} &= U(x',t',u') \end{aligned} \tag{2.5}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x' = x, \quad t' = t, \quad u' = u, \qquad \text{για } \epsilon = 0.$$

Ο γραμμικός διαφορικός τελεστής

$$\Gamma = X\frac{\partial}{\partial x} + T\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.6}$$

καλείται *απειροστός γεννήτορας* του μετασχηματισμού (2.4).

2.4 Αναλλοίωτες συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $F(x',t',u')$ καλείται *αναλλοίωτη* μέσω των μετασχηματισμών (2.4) αν και μόνο εάν

$$F(x',t',u') = F(x,t,u).$$

Θεώρημα: Μια συνάρτηση $F(x',t',u')$ είναι αναλλοίωτη αν και μόνο εάν είναι λύση της Μ.Δ.Ε.

$$\Gamma F(x',t',u') = 0,$$

όπου Γ ορίζεται από την εξίσωση (2.6). Η απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο [1].

2.5 Αναλλοίωτες Μ.Δ.Ε. (Invariant P.D.E.)

Σ'αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε πότε μια Μ.Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη μέσω των μετασχηματισμών (2.4). Επομένως, χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε πώς μετασχηματίζονται οι παραγώγοι. Θα περιοριστούμε σε Μ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

Ορίζουμε τους μετασχηματισμούς επέκτασης:

$$u'_{x'} = u_x + \epsilon U^x(x,t,u,u_x,u_t) + O(\epsilon^2)$$
$$u'_{t'} = u_t + \epsilon U^t(x,t,u,u_x,u_t) + O(\epsilon^2)$$
$$u'_{x'x'} = u_{xx} + \epsilon U^{xx}(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) + O(\epsilon^2)$$
$$u'_{x't'} = u_{xt} + \epsilon U^{xt}(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) + O(\epsilon^2)$$
$$u'_{t't'} = u_{tt} + \epsilon U^{tt}(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) + O(\epsilon^2)$$

όπου οι γεννήτορες επέκτασης δίνονται από τους τύπους:

$$U^x = D_x(U) - u_x D_x(X) - u_t D_x(T), \ldots \quad (2.7)$$
$$U^{xx} = D_x(U^x) - u_{xx} D_x(X) - u_{xt} D_t(T), \ldots \quad (2.8)$$

Οι απειροστοί τελεστές γεννητόρων επέκτασης ορίζονται ως εξής:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma + U^x \frac{\partial}{\partial u_x} + U^t \frac{\partial}{\partial u_t}$$

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(1)} + U^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + U^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + U^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

Ένας μετασχηματισμός καλείται *συμμετρία Lie* μιας Μ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$E(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) = 0,$$

αν η Μ.Δ.Ε. έχει την ίδια μορφή και με τις νέες μεταβλητές x', t', u'. Δηλαδή,

$$E(x',t',u',u'_{x'},u'_{t'},u'_{x'x'},u'_{x't'},u'_{t't'}) = 0.$$

Η Μ.Δ.Ε. $E = 0$ έχει μια συμμετρία της μορφής του απειροστού μετασχηματισμού αν και μόνο εάν

$$\Gamma^{(2)} E|_{E=0} = 0. \quad (2.9)$$

Η (2.9) οδηγεί σε ένα σύστημα από διαφορικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις $X(x,t,u)$, $T(x,t,u)$ και $U(x,t,u)$. Η λύση του προσδιορίζει τις συμμετρίες Lie της υπο-εξέταση Μ.Δ.Ε.

Παράδειγμα (Εξίσωση του Burgers):

Έστω η εξίσωση

$$E = u_t - u u_x - u_{xx}, \quad (2.10)$$

η οποία καλείται εξίσωση του Burgers και έχει εφαρμογές στη μη-γραμμική ηχητική φυσική. Η εξίσωση (2.9) μας οδηγεί σ'ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με άγνωστες συναρτήσεις $X(x,t,u)$, $T(x,t,u)$ και $U(x,t,u)$. Η λύση του συστήματος δίνει τα πιο κάτω αποτελέσματα [4]

$$X = c_2 + c_3 t + c_4 x + c_5 t x, \quad T = c_1 + 2c_4 t + c_5 t^2, \quad U = -c_3 - c_4 u - c_5(x + tu)$$

Επομένως, η εξίσωση του Burgers έχει πέντε συμμετρίες (πέντε-παραμέτρων ομάδα μετασχηματισμών Lie).

2.6 Λύσεις Ομοιότητας (Similarity Transformations)

Οι συμμετρίες μας οδηγούν στην κατασκευή μετασχηματισμών τέτοιοι ώστε να μετατρέπουν μια Μ.Δ.Ε δυο ανεξαρτήτων μεταβλητών σε Σ.Δ.Ε. Γενικότερα, μειώνουν τον αριθμό των ανεξαρτήτων μεταβλητών μιας Μ.Δ.Ε. κατά ένα. Τέτοιοι μετασχηματισμοί καλούνται *μετασχηματισμοί ή λύσεις ομοιότητας*. Οι λύσεις ομοιότητας προκύπτουν από την επίλυση της Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$Xu_x + Tu_t = U, \tag{2.11}$$

η οποία καλείται *συνθήκη αναλλοίωτης επιφάνειας*. Τώρα, αν $\frac{X}{T}$ είναι ανεξάρτητο του u τότε η λύση της (2.11) είναι της μορφής:

$$\eta(x,t) = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$
$$u(x,t) = F(x,t,\eta,f(\eta)) \tag{2.12}$$

όπου F είναι γνωστή συνάρτηση. Η εξίσωση (2.12) είναι η *λύση ομοιότητας*. Η συνάρτηση $\eta(x,t)$ καλείται *μεταβλητή ομοιότητας* η οποία αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή της Σ.Δ.Ε που προκύπτει από το μετασχηματισμό αυτό. Η συνάρτηση $f(\eta)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση της Σ.Δ.Ε.

Παράδειγμα

Για την εξίσωση του Burgers στην περίπτωση όπου

$$\Gamma_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$$

βρίσκουμε την πιο κάτω λύση ομοιότητας:

$$u = \frac{1}{x}f(\eta), \quad \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \eta = xt^{-\frac{1}{2}}$$

Αντικαθιστώντας την πιο πάνω λύση ομοιότητας στην εξίσωση του Burgers, η εξίσωση του Burgers μετασχηματίζεται στην εξής Σ.Δ.Ε.

$$2\eta(\eta-1)f_{\eta\eta} + 2ff_\eta + (4+\eta^3)f_\eta = 0.$$

Η πιο πάνω Σ.Δ.Ε. είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Μπορεί όμως να λυθεί χρησιμοποιώντας αριθμητικές ή προσεγγιστικές μεθόδους.

Παράδειγμα(Πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί):

Έχουμε δει, ότι για να εντοπίσουμε τη μορφή της αντίστοιχης ομάδας μετασχηματισμών σε πεπερασμένη μορφή των εξισώσεων (2.3), αρκεί να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2.5). Επομένως, για την εξίσωση του Burgers χρησιμοποιώντας τη συμμετρία

$$\Gamma_5 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x+ut)\frac{\partial}{\partial u}$$

το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2.5) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\epsilon} &= x't' \\
\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\epsilon} &= t'^2 \\
\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\epsilon} &= -(x'+t'u')
\end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x' = x, \quad t' = t, \quad u' = u, \qquad \text{για } \epsilon = 0.$$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, βρίσκουμε την ακόλουθη ομάδα μετασχηματισμών σε πεπερασμένη μορφή:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1-\epsilon t} \\ t' &= \frac{t}{1-\epsilon t} \\ u' &= u - \epsilon(x + tu) \end{aligned}$$

όπου $\epsilon_0 = 0,\ \epsilon^{-1} = -\epsilon$ και $\varphi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$.

3 Συμμετρίες Lie-Λύσεις Ομοιότητας της $G(u)u_t = (F(u)u_x)_x$

3.1 Εφαρμογές

Θεωρούμε τη γενικευμένη μη-γραμμική εξίσωση

$$G(u)u_t = (F(u)u_x)_x + H(x,t), \tag{3.1}$$

όπου $F(u) \neq 0$.

Αρκετά φυσικά προβλήματα περιγράφονται απο εξισώσεις της πιο πάνω μορφής. Ένα από αυτά είναι η κατακόρυφη μεταβολή της κατανομής της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου σε στάσιμη λίμνη. Θεωρούμε τη μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς της θερμότητας στην κατακόρυφη διεύθυνση, αγνοώντας τη ροή του ρευστού και υποθέτοντας ότι η απόλυτη τιμή της ειδικής θερμότητας του νερού σε σχέση με το πεδίο τιμών της θερμοκρασίας είναι αισθητά σταθερή. Η κατακόρυφη μεταφορά της θερμότητας στη λίμνη περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\rho(T)T_t = (k(T)T_z)_z + r(z,t), \quad z > 0, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

όπου T είναι η θερμοκρασία, $r(z,t)$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο απορροφούνται οι ακτίνες του ήλιου από το νερό, t είναι ο χρόνος, z είναι η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης, ρ η πυκνότητα και k είναι η θερμική αγωγιμότητα. Περισσότερα για την εξίσωση (3.2) δες [6] και στη βιβλιογραφία της.

Θα υποθέσουμε ότι $H(x,t)$ στην εξίσωση (3.1), είναι σταθερή συνάρτηση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $H(x,t) = 0$. Επομένως προκύπτει η εξίσωση

$$G(u)u_t = (F(u)u_x)_x. \tag{3.3}$$

Ένα άλλο φυσικό πρόβλημα για την επίλυση του οποίου χρησιμοποιείται η (3.3), είναι η αγωγή θερμότητας στα μέταλλα. Το πρόβλημα αγωγής της θερμότητας στα στερεά και η διαδικασία τήξης και εξάτμισης των μετάλλων στην περίπτωση που η επιφάνεια τους εκτίθεται σε μεγάλη ποσότητα ενέργειας περιγράφονται από τη μη-γραμμική εξίσωση

$$S(u)u_t = (K(u)u_x)_x, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0, \tag{3.4}$$

όπου $K(u)$ είναι ο αγωγός της θερμότητας, $S(u)$ είναι η ειδική θερμότητα και $u(x,t)$ το ζητούμενο πεδίο θερμοκρασίας. Περισσότερα για την εξίσωση (3.4) δες [7] και στη βιβλιογραφία της.

3.2 Υπολογισμός των συμμετριών Lie

Σ'αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε τις συμμετρίες Lie τις εξίσωσης (3.3). Έχουμε δει στην εισαγωγή ότι μια Μ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης έχει συμμετρίες αν και μόνο εάν $\Gamma^{(2)}E|_{E=0} = 0$, όπου σ'αυτήν την περίπτωση

$$E = G(u)u_t - F(u)u_{xx} - F'(u)u_x^2. \tag{3.5}$$

Επομένως έχουμε

$$\Gamma^{(2)}\left[G(u)u_t - F(u)u_{xx} - F'(u)u_x^2\right] = 0, \quad \text{όπου} \;\; u_t = \frac{F(u)u_{xx} + F'(u)u_x^2}{G(u)}. \tag{3.6}$$

Επειδή η εξίσωση (3.5) είναι πολυώνυμο ως προς τις παραγώγους του u ως προς x, μπορεί ν'αποδεικτεί [5] ότι $X = X(x,t)$, $T = T(t)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση των μετασχηματισμών επέκτασης. Επομένως χρησιμοποιώντας τους τύπους (2.7) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} U^x &= U_x + (U_u - X_x)u_x, \\ U^t &= U_t + (U_u - T_t)u_t - X_t u_x, \\ U^{xx} &= U_{xx} + (2U_{xu} - X_{xx})u_x + U_{uu}u_x^2 + (U_u - 2X_x)u_{xx}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω εξισώσεις στην εξίσωση (3.6) και εξισώνοντας τους συντελεστές των μερικών παραγώγων του u ως προς x καταλήγουμε στο εξής σύστημα:

$$U\left(\frac{G_u F}{G} - F_u\right) - FT_t + 2FX_x = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{UG_uF_u}{G} - UF_{uu} - F_uU_u + 2F_uX_x - T_tF_u - FU_{uu} = 0, \tag{3.9}$$

$$-2F_uU_x - GX_t - 2FU_{xu} + FX_{xx} = 0, \tag{3.10}$$

$$GU_t - FU_{xx} = 0. \tag{3.11}$$

Η λύση του πιο πάνω συστήματος θα μας δώσει τις μορφές των X, T και U, καθώς και τις συναρτήσεις F και G. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι πιο γενικά από αυτά της [7].

Από την εξίσωση (3.8) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, την περίπτωση όπου ο συντελεστής του U μηδενίζεται και την περίπτωση όπου δε μηδενίζεται. Επομένως έχουμε

(1) $G(u)$ να είναι πολλαπλάσιο της $F(u)$. Δηλαδή $G = \mu F$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρνουμε $\mu = 1$.

(2) $G(u)$ να μην είναι πολλαπλάσιο της $F(u)$.

Περίπτωση 1: G=F

Θέτουμε

$$G = F = Q_u(u). \tag{3.12}$$

Από την εξίσωση (3.8) έχουμε $X_x = \frac{1}{2}T_t$. Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$X = \frac{x}{2}T_t + g(t). \tag{3.13}$$

Αντικαθιστώντας την (3.13) στην (3.9) βρίσκουμε $\frac{(FU)_{uu}}{(FU)_u} = \frac{F_u}{F}$ και ολοκληρώνοντας ως προς u έχουμε

$$U = \frac{Q}{Q_u}A(x,t) + \frac{1}{Q_u}B(x,t), \tag{3.14}$$

όπου $A(x,t)$ και $B(x,t)$ συναρτήσεις προς υπολογισμό. Αντικαθιστώντας στην (3.10) τις (3.14) και (3.12) βρίσκουμε ότι

$$A = -\frac{x^2}{8}T_{tt} - \frac{x}{2}g_t + c_1(t). \tag{3.15}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας στην (3.11) την (3.14) και εξισώνοντας συντελεστές του Q έχουμε

$$A_t - A_{xx} = 0, \tag{3.16}$$

$$B_t - B_{xx} = 0. \tag{3.17}$$

Αντικαθιστούμε την (3.15) στην (3.16) και εξισώνουμε συντελεστές του x για να βρούμε

$$\begin{aligned} T &= \frac{c_2 t^2}{2} + c_3 t + c_4, &(3.18)\\ g &= c_5 t + c_6, &(3.19)\\ c_1 &= -\frac{c_2 t}{4} + c_7. &(3.20)\end{aligned}$$

Επομένως οι (3.15), (3.13), (3.14) γράφονται αντίστοιχα

$$\begin{aligned} A &= -\frac{c_2 x^2}{8} - \frac{c_5 x}{2} - \frac{c_2 t}{4} + c_7, \\ X &= \frac{c_2}{2} xt + c_3 \frac{x}{2} + c_5 t + c_6, &(3.21)\\ U &= \frac{Q}{Q_u}(-c_2 \frac{x^2}{8} - c_5 \frac{x}{2} - \frac{c_2 t}{4} + c_7) + \frac{1}{Q_u} B(x,t). &(3.22)\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (3.18), (3.21) και (3.22), προσδιορίζουν του γεννήτορες και συνεπώς τις ζητούμενες συμμετριες Lie.

Περίπτωση 2a: $F \neq G$ όπου F και G είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Από την εξίσωση (3.8) έχουμε

$$U = \frac{F T_t - 2 F X_x}{\frac{G_u}{G} F - F_u}. \tag{3.23}$$

Πρώτα ελέγχουμε ότι η

$$X = \frac{x}{2} T_t + g(t), \tag{3.24}$$

ικανοποιεί την εξίσωση (3.9). Αντικαθιστώντας την (3.24) στην (3.10) και εξισώνοντας συντελεστές του x βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T &= c_1 t + c_2, &(3.25)\\ g &= c_3. &(3.26)\end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (3.25) και (3.26) η (3.24) γράφεται

$$X = \frac{x}{2} c_1 + c_3. \tag{3.27}$$

Χρησιμοποιώντας επίσης, τις εξισώσεις (3.25) και (3.27) στην εξίσωση (3.23), η (3.23) μας δίνει:

$$U = 0. \tag{3.28}$$

Περίπτωση 2b: $F = Q^n Q_u,\ G = Q^{n-1} Q_u$, όπου $Q = Q(u),\ Q_u \neq 0$

Πρώτα ελέγχουμε ότι η

$$U = -\frac{Q}{Q_u}(T_t - 2X_x), \tag{3.29}$$

ικανοποιεί την (3.9). Αντικαθιστώντας την (3.29) στην (3.10) βρίσκουμε

$$(4n+3)QX_{xx}+X_t=0. \tag{3.30}$$

Επομένως, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: ((i) για $n=-\frac{3}{4}$ και (ii) για $n\neq-\frac{3}{4}$

(i) $n\neq-\frac{3}{4},\quad X_{xx}=0,\quad X_t=0$

Από την $X_{xx}=0$ βρίσκουμε

$$X=xh_1(t)+h_2(t). \tag{3.31}$$

Από την $X_t=0$ βρίσκουμε

$$xh_{1t}+h_{2t}=0. \tag{3.32}$$

Εξισώνοντας συντελεστές του x βρίσκουμε $h_1(t)=c_1$ και $h_2(t)=c_2$. Επομένως

$$X=c_1x+c_2. \tag{3.33}$$

Αντικαθιστώντας την (3.33) στην (3.11) και εξισώνοντας δυνάμεις του Q βρίσκουμε

$$T=c_3t+c_4. \tag{3.34}$$

Αρα η (3.29) γράφεται

$$U=-\frac{Q}{Q_u}(c_3-2c_1). \tag{3.35}$$

(ii) $n=-\frac{3}{4},\quad X_t=0$

Αρα

$$X=X(x). \tag{3.36}$$

Αντικαθιστώντας την (3.36) και τις εξισώσεις $F=Q^nQ_u$, $G=Q^{n-1}Q_u$ στην (3.11) και εξισώνοντας δυνάμεις του Q βρίσκουμε

$$X_{xxx}=0, \tag{3.37}$$

$$-T_{tt}+2X_{xt}=0. \tag{3.38}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.36) στις πιο πάνω σχέσεις βρίσκουμε

$$X = \frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3, \tag{3.39}$$

$$T = c_4t+c_5. \tag{3.40}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.40) και (3.39) στην (3.29), η (3.29) γράφεται

$$U=-\frac{Q}{Q_u}(c_4-2c_1x-2c_2). \tag{3.41}$$

Περίληψη

Πιο κάτω θα δώσουμε περίληψη των αποτελεσμάτων. Για κάθε περίπτωση δίνουμε τους γεννήτορες X, T, U, καθώς και τις συμμετρίες Γ_i που ορίζονται από τη σχέση:

$$\Gamma=X\frac{\partial}{\partial x}+T\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial u}=\sum_{i=1}^{n}c_i\Gamma_i \tag{3.42}$$

Συνοπτικά έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. $F = G = Q_u(u)$

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{c_2}{2}xt + c_3\frac{x}{2} + c_5 t + c_6 \\
T &= \frac{c_2 t^2}{2} + c_3 t + c_4 \\
U &= \frac{Q}{Q_u}\left(-c_2\frac{x^2}{8} - c_5\frac{x}{2} - \frac{c_2 t}{4} + c_7\right) + \frac{1}{Q_u}B(x,t) \\
\Gamma_2 &= xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{Q}{Q_u}(-\frac{x^2}{4} - \frac{t}{2})\frac{\partial}{\partial u} \\
\Gamma_3 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \\
\Gamma_4 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\Gamma_5 &= t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{Q}{Q_u}(-\frac{t}{4})\frac{\partial}{\partial u} \\
\Gamma_6 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
\Gamma_7 &= \frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u} \\
\Gamma_\infty &= \frac{1}{Q_u}B(x,t)\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}
$$

όπου η συνάρτηση B(x,t) ικανοποιεί την εξίσωση (3.17).

2a. $F \neq G$

$$
\begin{aligned}
X &= c_1\frac{x}{2} + c_3 \\
T &= c_1 t + c_2 \\
U &= 0 \\
\Gamma_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \\
\Gamma_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\Gamma_3 &= \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}
$$

2b. $F = Q^n Q_u,\ G = Q^{n-1}Q_u$: $n \neq -\frac{3}{4}$

$$
X = c_1 x + c_2
$$

$$
\begin{aligned}
T &= c_3 t + c_4\\
U &= -\frac{Q}{Q_u}(c_3 - 2c_1)\\
\Gamma_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u}\\
\Gamma_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\\
\Gamma_3 &= t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u}\\
\Gamma_4 &= \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

2c. $F = Q^n Q_u,\ G = Q^{n-1} Q_u$**:** $n = -\frac{3}{4}$

$$
\begin{aligned}
X &= c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\\
T &= c_4 t + c_5\\
U &= -\frac{Q}{Q_u}(c_4 - 2c_1 x - 2c_2)\\
\Gamma_1 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + 4x\frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u}\\
\Gamma_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u}\\
\Gamma_3 &= \frac{\partial}{\partial x}\\
\Gamma_4 &= t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{Q}{Q_u}\frac{\partial}{\partial u}\\
\Gamma_5 &= \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

3.3 Λύσεις Ομοιότητας

Στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε όλες τις πιθανές λύσεις ομοιότητας για την περίπτωση 2. Τα πιο κάτω είναι στο πνεύμα της εργασίας [8], όπου έχουν κατασκευαστεί όλες οι πιθανές λύσεις ομοιότητας μιας γενικής κυματικής εξίσωσης. Από την προηγούμενη ενότητα, γνωρίζουμε ότι χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση (2.11). Από τη θεωρία των Μ.Δ.Ε. γνωρίζουμε ότι για να λυθεί μια Μ.Δ.Ε. χρειάζεται να λύσουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\frac{\mathrm{d}x}{X} = \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{\mathrm{d}u}{U}, \tag{3.43}$$

όπου X, T, U είναι οι γεννήτορες του μετασχηματισμού. Για τον υπολογισμό των λύσεων ομοιότητας θα υποθέσουμε ότι

$$Q(u) = u^m.$$

Για όλες τις περιπτώσεις, από τις συμμετρίες $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$ προκύπτουν αντίστοιχα, οι λύσεις ομοιότητας:

$$u = F(\eta), \quad \eta = t,$$
$$u = F(\eta), \quad \eta = x.$$

Επομένως για τις διάφορες περιπτώσεις βρίσκουμε τις πιο κάτω λύσεις ομοιότητας.

2a. $F \neq G$

1. $\Gamma_3 + \Gamma_2$:

$$u = f(\eta) \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = x - \frac{c_3}{c_2}t$$

2. $\Gamma_1 + \Gamma_2$:

$$u = f(\eta) \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = \frac{x}{(c+2t)^{\frac{1}{2}}} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c = \frac{c_2}{c_1}$$

2b. $F = Q^n Q_u,\ G = Q^{n-1}Q_u$: $n \neq -\frac{3}{4}$

1. $\Gamma_2 + \Gamma_4$:

$$u = f(\eta) \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = x - \frac{c_2}{c_4}t$$

2. $\Gamma_2 + \Gamma_3$:

$$u = t^{-\frac{1}{m}} f(\eta) \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = x - \lambda \log t, \;\; \lambda = \frac{c_2}{c_3}$$

3. $\Gamma_1 + \Gamma_4$:

$$u = x^{\frac{2}{m}} f(\eta), \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = ct - \log x \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c = \frac{c_1}{c_4}$$

4. $\Gamma_1 + \Gamma_3$:

$$u = x^{\frac{2-\frac{1}{\lambda}}{m}} f(\eta), \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = \frac{x}{t^{\lambda}} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda = \frac{c_1}{c_3}$$

2c. $F = Q^n Q_u,\ G = Q^{n-1}Q_u$: $n = -\frac{3}{4}$

1. $\Gamma_2 + \Gamma_4$:

$$u = f(\eta) x^{\frac{2}{m}} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = \frac{x}{t^{c}} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c = \frac{c_2}{c_4}$$

2. $\Gamma_2 + \Gamma_5$:

$$u = f(\eta) x^{\frac{2}{m}}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta = \log x - ct \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c = \frac{c_2}{c_5}$$

3. $\Gamma_3 + \Gamma_5$:

$$u=f(\eta),\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=x-ct \ \ \kappa\alpha\iota \ \ c=\frac{c_3}{c_5}$$

4. $\Gamma_3+\Gamma_4$:

$$u=f(\eta)t^{-\frac{1}{m}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=cx-\log t \ \ \kappa\alpha\iota \ \ c=\frac{c_4}{c_3}$$

5. $\Gamma_1+\Gamma_4:c_1=1$

$$u=f(\eta)x^{\frac{4}{m}}\mathrm{e}^{\frac{c_4}{mx}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\frac{1}{c_4}\log t+\frac{1}{x}$$

6. $\Gamma_1+\Gamma_5:c_1=1$

$$u=f(\eta)x^{\frac{4}{m}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\frac{1}{x}+\frac{1}{c_5}t$$

7. $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_5:c_1=1,c_3=a^2$

$$u=f(\eta)(x^2+a^2)^{\frac{m}{8}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{a}{c_5}t$$

8. $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_4:c_1=1,c_3=a^2$

$$u=f(\eta)(x^2+a^2)^{\frac{2}{m}}\mathrm{e}^{\frac{c_4}{ma}\tan^{-1}\frac{x}{a}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{a}{c_4}\log t$$

9. $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_5:c_1=1,c_3=-a^2$

$$u=f(\eta)(x^2-a^2)^{\frac{2}{m}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2ta}{c_5}}$$

10. $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_4:c_1=1,c_3=-a^2$

$$u=f(\eta)\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{-\frac{c_4}{2ma}}(x^2-a^2)^{\frac{2}{m}},\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)t^{-\frac{2a}{c_4}}$$

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, με τη χρήση των λύσεων ομοιότητας, μια Μ.Δ.Ε. δύο ανεξάρτητων μεταβλητών μετατρέπεται σε Σ.Δ.Ε. Πιο κάτω θα δώσουμε τις μορφές που παίρνει η Μ.Δ.Ε. (3.3), με τη χρήση κάποιων λύσεων ομοιότητας.

Παράδειγμα

1. Στην περίπτωση όπου $F\neq G$, αν αντικαταστήσουμε τη λύση ομοιότητας

$$u=f(\eta)\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=x-\frac{c_3}{c_2}t$$

στην (3.3), τότε η Μ.Δ.Ε. μετασχηματίζεται στη Σ.Δ.Ε.

$$Ff_{\eta\eta}+F_uf_\eta^2+cGf_\eta=0.$$

2. Στην περίπτωση όπου $F=Q^nQ_u,\ G=Q^{n-1}Q_u$: $n\neq-\frac{3}{4}$, αν αντικαταστήσουμε την λύση ομοιότητας

$$u=t^{-\frac{1}{m}}f(\eta)\quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta=x-\lambda\log t,\ \ \lambda=\frac{c_2}{c_3}$$

στην (3.3), τότε η Μ.Δ.Ε. μετασχηματίζεται στη Σ.Δ.Ε.

$$f^m f_{\eta\eta} + (mn + m - 1) f^{m-1} f_\eta^2 + \frac{\lambda}{m} f_\eta + \frac{1}{m^2} f = 0.$$

Οι πιο πάνω Σ.Δ.Ε. που προκύπτουν, είναι δύσκολο να λυθούν αναλυτικά. Επομένως χρειάζονται αριθμητικές και προσεγγιστικές τεχνικές για την επίλυσή τους.

3.4 Πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί

Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να μετατρέψουμε τον απειροστό μετασχηματισμό σε πεπερασμένο μετασχηματισμό, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\epsilon} &= X(x', t', u') \\
\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\epsilon} &= T(x', t', u') \\
\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\epsilon} &= U(x', t', u')
\end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x' = x, \quad t' = t, \quad u' = u, \qquad \text{για } \epsilon = 0.$$

Πιο κάτω θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Χρησιμοποιούμε τη συμμετρία Γ_1 της περίπτωσης 2c. Το σύστημα τώρα, γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\epsilon} &= {x'}^2 \\
\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\epsilon} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\epsilon} &= -4\frac{x'u'}{m}
\end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x' = x, \quad t' = t, \quad u' = u, \qquad \text{για } \epsilon = 0.$$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, βρίσκουμε την ακόλουθη ομάδα μετασχηματισμών σε πεπερασμένη μορφή:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{1 - \epsilon x} \\
t' &= t \\
u' &= u(1 - \epsilon x)^{\frac{4}{m}}
\end{aligned}$$

όπου $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ και $\varphi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$.

Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό νέων λύσεων με τη χρήση γνωστών λύσεων. Για παράδειγμα, από την τετριμμένη λύση

$$u = \sigma\tau\alpha\theta. = c$$

προκύπτει η λύση

$$u = c\left(\frac{1}{1 + \epsilon x}\right)^{\frac{4}{m}}.$$

Αυτή η νέα λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μιας δεύτερης λύσης.

References

[1] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] N. H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1999.

[3] P. E. Hydon, *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press, 2000.

[4] N. H. Ibragimov *Symmetries, exact solutions and conservation laws: Lie Group Analysis of Differential Equations vol.1* (Boca Raton, FL: Chemical Rubber Company), 1994.

[5] J. G. Kingston and C. Sophocleous, On form-preserving point transformations of partial differential equations *J. Phys. A:Math. Gen.* **31** 1597-619, 1998.

[6] M. B. Abd-Malek, Application of the Group-Theoretical Method to Physical Problems *J. Nonlinear Math. Phys.* **5** 314-330, 1998.

[7] E. A. Saied, New exact solutions of heat conduction in metals *J. Stat. Phys.* **82** 951-962, 1996.

[8] Β. Τζάθα, Λύσεις ομοιότητας μιας μη-γραμμικής κυματικής εξίσωσης, *Ανεξάρτητη Εργασία*, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, 2000.