ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 132)

Ενδιάμεση εξέταση
Τετάρτη 15 Απριλίου, 2020

---

1. (α) Δίνονται τα σημεία $A(5,1,-2)$ και $B(4,-1,3)$. Δίνεται η ευθεία L_1 με εξίσωση

$$\mathbf{r} = (-8,5,-6) + t(5,0,-2).$$

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας L_2 η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B.

(ii) Να δειχθεί ότι οι ευθείες L_1 και L_2 τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής, P.

(iii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου C που βρίσκεται πάνω στην ευθεία L_1 και είναι τέτοιο ώστε το τρίγωνο PBC να έχει ορθή γωνία στο B.

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε τα τέσσερα σημεία $(1,1,-1)$, $(0,3,-2)$, $(-2,1,0)$ και $(k,0,2)$ να βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο.

2. Να βρεθεί η οξεία γωνία μεταξύ των επιπέδων με εξισώσεις

$$x - 2y + z = 9 \quad \text{και} \quad x + y - z = -2.$$

Τα επίπεδα τέμνονται στην ευθεία L και A είναι σημείο της L με διάνυσμα θέσης $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
(i) Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b.
(ii) Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας L.

Τα δύο επίπεδα P_1 και P_2 είναι κάθετα στην ευθεία L. Η απόσταση του σημείου A από το P_1 είναι $\sqrt{14}$ και η απόσταση του από το P_2 είναι επίσης $\sqrt{14}$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων P_1 και P_2.

3. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καμπύλη και το διάνυσμα θέσης τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με

$$\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Να βρεθούν:

(i) το μέτρο της εφαπτομενικής και της κάθετης επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t=0$,

(ii) η εφαπτομενική και η κάθετη επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=0$,

(iii) η καμπυλότητα στο σημείο στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t=0$.

4. (α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

να δειχθεί ότι η εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

γράφεται στη πολική μορφή

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = 3 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}$.

(i) Να βρεθεί η κατευθυντική παράγωγος της $f(x,y)$ στο σημείο $(3,2)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος από το σημείο $(1,2)$ στο σημείο $(-2,6)$.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της κατευθυντικής παραγώγου στο σημείο $(3,2)$.

(iii) Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο $\nabla f(3,2)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί η $D_{\mathbf{u}}f(3,2)$.

5. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σχετικά ακρότατα της $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$ στην κλειστή περιοχή που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 4$.

(γ) Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(2,1,1)$ από το επίπεδο $x + y + z = 1$.

Απαντήσεις

1(α) (i) $\mathbf{r} = (5,1,-2) + t(-1,-2,5)$
(ii) $P(7,5,-12)$
(iii) $C(-23,5,0)$
(β) $k=-6$

2 $\approx 62^o$ (i) $a=2,\ b=-3$ (ii) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$
P_1: $x+2y+3z=13$ P_2: $x+2y+3z=-15$

3 $a_T\mathbf{T} = -\frac{7}{6}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}),\ a_N\mathbf{N} = \frac{13}{6}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{6}\mathbf{k}$, $\kappa = \frac{\sqrt{53}}{6\sqrt{6}}$

4(β) (i) $-\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{1}{6}\sqrt{13}$ (iii) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $D_{\mathbf{u}}f(3,2) = 0$

5 (α) $(1,1,3)$ σχετικό ελάχιστο.
(β) Απόλυτο μέγιστο $=28$ στα $(\pm 2, 4)$, απόλυτο ελάχιστο $=-2$ στο $(0,1)$
(γ) $\sqrt{3}$