

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

(ΜΑΣ 132)

Ενδιάμεση εξέταση

Παρασκευή 12 Μαρτίου, 2021

1. (α) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης

$$x = \cos \theta, \quad y = \cos 3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

στα οποία η εφαπτομένη είναι (i) οριζόντια και (ii) κατακόρυφη.

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, γύρω από τον άξονα των x , του τόξου της καμπύλης:

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad \text{από } t = 0 \text{ ως } t = 1.$$

2. (α) Χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την έλλειψη.

(β) Να δειχθεί ότι η πολική εξίσωση

$$r = \frac{6}{2 + \sin \theta}$$

αντιπροσωπεύει έλλειψη και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Να γίνει η γραφική παράσταση της πολικής καμπύλης $r = -1 + \cos \theta$ σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στα σημεία της καμπύλης όπου $\theta = -\frac{\pi}{2}$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$ και να σχεδιαστούν οι εφαπτομένες.

Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης.

4. Να βρεθούν τα σημεία τομής των πολικών καμπυλών $r = 3 \cos \theta$ και $r = 1 + \cos \theta$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης $r = 3 \cos \theta$ και στο εξωτερικό της $r = 1 + \cos \theta$.

5. (α) (i) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κορυφές τα σημεία $(3, 1)$, $(3, 9)$ και με μήκος του μικρού άξονα είναι ίσο με 6 μονάδες.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κορυφές τα σημεία $(0, 2)$, $(6, 2)$ και ασύμπτωτες με εξισώσεις $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

(β) Να προσδιοριστεί το είδος της κωνικής τομής για τις πιο κάτω εξισώσεις. Αν είναι παραβολή, να βρεθούν η εστία, η κορυφή και η διευθετούσα. Αν είναι έλλειψη, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες και οι κορυφές. Αν είναι υπερβολή, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι ασύμπτωτες.

(i) $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

(ii) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 6 = 0$

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$43x^2 - 14\sqrt{3}xy + 57y^2 - 36\sqrt{3}x - 36y - 540 = 0$$

αντιπροσωπεύει έλλειψη. Να βρεθούν οι κορυφές, οι εστίες και το κέντρο της.

7. Να δειχθεί ότι οι ευθείες

$$L_1 : x = 3 - t, \quad y = 4 + 4t, \quad z = 1 + 2t$$

$$L_2 : x = t, \quad y = 3, \quad z = 2t.$$

είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

8. Τα σημεία P , Q , R , S έχουν διανύσματα θέσης ως προς το αρχή των αξόνων O :

$$\vec{OP} = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \quad \vec{OQ} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \vec{OR} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \vec{OS} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

(i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα σημεία P , Q και R .

(ii) Η κάθετη ευθεία από το S προς το επίπεδο το τέμνει στο σημείο T . Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του T , δηλαδή το \vec{OT} , και το μήκος του ST .