

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



## ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ (ΜΑΣ 132)

#### Ενδιάμεση εξέταση

Τετάρτη 16 Φεβρουαρίου, 2022

---

1. (α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$x = 3t^2 + 1, \quad y = 2t^3 + 1, \quad t > 0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο  $(4, 3)$ .

(β) Να βρεθούν τα δύο σημεία στα οποία η καμπύλη

$$x = 1 + e^t, \quad y = t - t^2$$

τέμνει τον άξονα των  $x$  και ναδειχθεί ότι σε αυτό το διάστημα (μεταξύ των δύο σημείων) το γράφημα της καμπύλης είναι πάνω από τον άξονα των  $x$ . Στη συνέχεια, να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των  $x$ .

(γ) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

2. (α) Να βρεθούν τα σημεία του καρδιοειδούς  $r = 1 + \sin \theta$ , στα οποία η εφαπτομένη είναι οριζόντια ή κατακόρυφη.

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση των πολικών εξισώσεων

$$r = 1 + \cos \theta \quad \text{και} \quad r = 1 - \cos \theta$$

στο ίδιο σχήμα. Στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που είναι εντός και των δύο καμπυλών.

3. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$$

αντιπροσωπεύει υπερβολή και να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι γραμμικές ασύμπτωτες.

4. (α) (i) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία  $(-3, 5)$  και διευθετούσα  $y = 1$ .  
(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κορυφές  $(-3, 5)$  και  $(-3, -3)$  και εστίες  $(-3, 3)$  και  $(-3, -1)$ .  
(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κορυφές  $(-2, 0)$  και  $(-2, -4)$  και εστία  $(-2, -8)$ .

(β) Να προσδιοριστεί το είδος της κωνικής τομής για τις πιο κάτω εξισώσεις. Αν είναι παραβολή, να βρεθούν η εστία, η κορυφή και η διευθετούσα. Αν είναι έλλειψη, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες και οι κορυφές. Αν είναι υπερβολή, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι ασύμπτωτες.

- (i)  $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$   
(ii)  $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$   
(iii)  $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x - 31 = 0$

5. (α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για μήκος τόξου σε παραμετρικές εξισώσεις, ναδειχθεί ότι το μήκος τόξου της πολικής καμπύλης

$$r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο, να βρεθεί το μήκος της πολικής καμπύλης  $r = 2 + 2 \cos \theta$ .

(β) Το κομμάτι του καρδιοειδούς  $r = 1 - \cos \theta$  που είναι πάνω από τον πολικό άξονα, περιστρέφεται γύρω από τον πολικό άξονα. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται.