

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ (ΜΑΣ 132)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 8 Φεβρουαρίου, 2020

1. (α) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης

$$x = 5 + 3 \cos \theta, \quad y = -2 + \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

στα οποία η εφαπτομένη είναι (i) οριζόντια και (ii) κατακόρυφη.

(β) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$x = \sin^{-1} t, \quad y = \ln \sqrt{1 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

(γ) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης

$$x = 2 \cot \theta, \quad y = 2 \sin^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

και του άξονα των x .

[Το γράφημα της καμπύλης είναι πάνω από τον άξονα των x .]

2. (α) (i) Δίνονται δύο σημεία με πολικές συντεταγμένες (r_1, θ_1) και (r_2, θ_2) . Να δειχθεί ότι η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

(ii) Να βρεθεί η απόσταση στην περίπτωση όπου $\theta_1 = \theta_2$ και να εξηγηθεί η απάντηση.

(iii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των σημείων με πολικές συντεταγμένες $(1, 0)$ και $(1, \frac{\pi}{4})$.

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση των πολικών εξισώσεων

$$(i) r = 3 \cos 2\theta \quad (ii) r = \frac{6}{2 \sin \theta - 3 \cos \theta}$$

(γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης $(x^2 + y^2)^3 = 9(x^2 - y^2)^2$.

3. (i) Στο ίδιο σχήμα, να γίνει η γραφική παράσταση των πολικών εξισώσεων $r = a(1 + \cos \theta)$ και $r = a \sin \theta$.

(ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που είναι κοινό στο εσωτερικό των δύο καμπυλών.

(iii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για μήκος τόξου σε παραμετρικές εξισώσεις, ναδειχθεί ότι το μήκος τόξου της πολικής καμπύλης

$$r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

(iv) Να βρεθεί το εξωτερικό μήκος της σύνθετης καμπύλης που σχεδιάστηκε στο (i).

4. (α) (i) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία $(2, 2)$ και διευθετούσα $x = -2$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο $(-2, 3)$, εστία $(-2, 3 + \sqrt{5})$ και κορυφή $(-2, 6)$.

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κορυφές $(2, \pm 3)$ και το $(0, 5)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης.

(β) Να προσδιοριστεί το είδος της κωνικής τομής για τις πιο κάτω εξισώσεις. Αν είναι παραβολή, να βρεθούν η εστία, η κορυφή και η διευθετούσα. Αν είναι έλλειψη, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες και οι κορυφές. Αν είναι υπερβολή, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι ασύμπτωτες.

(i) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

(ii) $y^2 - 4x^2 + 16x - 25 = 0$

(iii) $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

5. (α) Έστω η εξίσωση

$$x^2 + Ay^2 + 2x + 2y + B = 0,$$

όπου $A > 0$. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση αντιπροσωπεύει έλλειψη ή κύκλο ή ένα σημείο ή δεν έχει γραφική παράσταση.

(β) Ναδειχθεί (απαλείφοντας τις τετραγωνικές ρίζες) ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

είναι ένα κομμάτι παραβολής.