

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



## ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

(ΜΑΣ 132)

#### Τελική εξέταση

Παρασκευή 20 Μαΐου, 2022

1. (α) Έστω η καμπύλη η οποία ορίζεται παραμετρικά

$$x = t^2 - 9, \quad y = t^2 - 8t.$$

- (i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο όπου  $t = 4$ .
- (ii) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει κλίση ίση με  $\frac{1}{2}$ .
- (iii) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι οριζόντια ή κατακόρυφη.

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων του καρδιοειδούς  $r = 1 - \cos \theta$ .

- (i) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από το καρδιοειδές στο πρώτο τεταρτημόριο.
- (ii) Να βρεθεί ολόκληρο το μήκος τόξου του καρδιοειδούς.

2. (α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $xy + x - y - 2 = 0$  αντιπροσωπεύει υπερβολή. Να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές, οι εστίες και οι ασύμπτωτες της.

(β) Δίνεται η κωνική τομή  $r = \frac{4}{5-4\sin\theta}$ .

- (i) Να προσδιοριστεί το είδος της.
- (ii) Να βρεθεί η εξίσωση της διευθετούσας.
- (iii) Να γίνει η γραφική παράσταση.

(γ) Να βρεθεί η πολική εξίσωση της έλλειψης για την οποία ο πόλος είναι μια από τις εστίες, η διευθετούσα είναι στα δεξιά του πόλου,  $a = 8$  και  $e = \frac{1}{2}$ .

3. Τρία επίπεδα  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  και  $\Pi_3$  έχουν εξισώσεις:

$$\Pi_1 : 8x - y - 14z = 20, \quad \Pi_2 : 6x + 2y - 5z = 26, \quad \Pi_3 : 2x + y - z = 40.$$

Η ευθεία  $L_1$  είναι η τομή των επιπέδων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  και η ευθεία  $L_2$  είναι η τομή των επιπέδων  $\Pi_1$  και  $\Pi_3$ .

- (i) Να δειχθεί ότι οι ευθείες  $L_1$  και  $L_2$  είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.
- (ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ της ευθείας  $L_1$  και του επιπέδου  $\Pi_3$ .

Η ευθεία  $L_3$  έχει εξίσωση  $\mathbf{r} = (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) + t(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ .

- (iii) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών  $L_1$  και  $L_3$ .
- (iv) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών  $L_2$  και  $L_3$ .

4. (α) Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καμπύλη και το διάνυσμα θέσης τη χρονική στιγμή  $t$  είναι ίσο με

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t \sin t\mathbf{k}.$$

Να βρεθούν τη χρονική στιγμή  $t = \frac{\pi}{2}$ :

- (i) η επιτάχυνση του σωματιδίου,
- (ii) το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\mathbf{T}(t)$ ,
- (iii) το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{N}(t)$ ,
- (iv) η καμπυλότητα στο σημείο στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο.

$$[\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}]$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$ .

Να βρεθούν:

- (i)  $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ , όπου  $\mathbf{u} = \cos \frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{4}\mathbf{j}$ ,
- (ii)  $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ , όπου  $\mathbf{u}$  μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του  $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ ,
- (iii)  $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ , όπου  $\mathbf{u}$  μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση από το σημείο  $(1, 2)$  στο  $(-2, 6)$ ,
- (iv) η μέγιστη τιμή της κατευθυντικής παραγώγου στο  $(3, 2)$ ,
- (v) μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{u}$  ορθογώνιο με το  $\nabla f(3, 2)$  και να υπολογιστεί η  $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$ .

5. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σχετικά ακρότατα της  $f(x, y) = 4x - 3x^3 - 2xy^2$ .

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x, y) = 2xy - x - y$  στην κλειστή περιοχή η οποία ορίζεται από τις ανισώσεις  $y \leq 4$  και  $y \geq x^2$ .

6. (α) Να σχεδιαστεί η περιοχή  $R$  που περικλείεται από τις παραβολές  $y = x^2$  και  $y = x(1 - x)$ . Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R 2y \, dA.$$

(β) Χρησιμοποιώντας διπλό ολοκλήρωμα να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής η οποία ορίζεται από τις ανισώσεις  $0 \leq x \leq 1$  και  $1 \leq y \leq e^x$ .

(γ) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy.$$

(δ) Να σχεδιαστεί η περιοχή  $R$  η οποία ορίζεται από τις ανισώσεις  $x^2 + y^2 \leq 2$  και  $x \geq 1$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R (x^2 + y^2)^{-2} \, dA.$$

[**Υπόδειξη:** Η πολική εξίσωση της ευθείας  $x = 1$  είναι  $r = \sec \theta$ . ]