ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 132)

Τελική εξέταση
Πέμπτη 27 Μαΐου, 2021

---

1. (α) (i) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης στο διάστημα που δίνεται,

$$x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

Το πιο πάνω τόξο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των x.
(ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται.

(β) Το επίπεδο Π έχει εξίσωση $2x + y + 3z = 21$ και η ευθεία γραμμή L διέρχεται από το σημείο $P(1, 2, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο Π.
(i) Να βρεθεί η εξίσωση της L.
(ii) Η ευθεία γραμμή L τέμνει το επίπεδο Π στο σημείο M. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M.
(iii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία OM, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.
(iv) Το σημείο Q είναι η ανάκλαση του σημείου P πάνω στο επίπεδο Π (το είδωλο του P ως προς το Π). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Q.

2. (α) (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης C με πολική εξίσωση

$$r = 2 + 2\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(ii) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη C.
Ο κύκλος με εξίσωση $(x-3)^2 + y^2 = 9$ τέμνει την καμπύλη C στα σημεία A και B.
(iii) Να βρεθούν οι πολικές συντεταγμένες των σημείων A και B.
Έστω R η περιοχή στα δεξιά του ευθύγραμμου τμήματος AB και εντός της καμπύλης C.
(iv) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής R.
(v) Να βρεθεί η περίμετρος της περιοχής R.

(β) Να δειχθεί ότι η πολική εξίσωση

$$r = \frac{4}{2 - \sin\theta}$$

αντιπροσωπεύει έλλειψη και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. (α) Να προσδιοριστεί το είδος της κωνικής τομής για τις πιο κάτω εξισώσεις. Αν είναι παραβολή, να βρεθούν η εστία, η κορυφή και η διευθετούσα. Αν είναι έλλειψη, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες και οι κορυφές. Αν είναι υπερβολή, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι ασύμπτωτες.

(i) $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$ (ii) $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ (iii) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Να γίνει η γραφική παράσταση των πιο πάνω κωνικών τομών.

(β) Να δειχθεί ότι η πιο κάτω εξίσωση αντιπροσωπεύει υπερβολή. Να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές, οι εστίες και οι ασύμπτωτες της.

$$32y^2 - 52xy - 7x^2 + 72\sqrt{5}x - 144\sqrt{5}y + 900 = 0$$

4. (α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(i) $D_{\mathbf{u}}f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή,
(ii) $D_{\mathbf{u}}f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ παίρνει την ελάχιστη τιμή,
(iii) $D_{\mathbf{u}}f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0$,
(iv) $D_{\mathbf{u}}f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 1$.

Στο (i) και στο (ii) να δοθεί η τιμή της κατευθυντικής παραγώγου $D_{\mathbf{u}}f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(β) Δίνεται ότι $z = f(x,y)$ είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Να δειχθεί ότι $z = f(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ είναι επίσης λύση των πιο πάνω εξισώσεων.

(γ) Να δειχθεί ότι η καμπυλότητα ορίζεται και ως $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.

Η καμπύλη C ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις:

$$x = t + \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Να δειχθεί ότι $\mathbf{T}(t) = \cos\frac{t}{2}\mathbf{i} + \sin\frac{t}{2}\mathbf{j}$ και να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο της καμπύλης όπου $t = \frac{2}{3}\pi$.

5. (α) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σχετικά ακρότατα της $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = (4y^2 - x^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ στην κλειστή κυκλική περιοχή $x^2 + y^2 \le 2$.

6. (α) Να σχεδιαστεί η περιοχή R που περικλείεται από τις καμπύλες $xy = 1,\ y = 0,\ y = x$ και $x = 2$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(β) Να σχεδιαστεί η περιοχή ολοκλήρωσης του διπλού ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.

(γ) Η περιοχή R που περικλείεται από τις ευθείες γραμμές $y = x,\ y = \frac{x}{2},\ y = \pi$ και $y = 2\pi$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$