

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



## ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

(ΜΑΣ 132)

#### Τελική εξέταση

Κυριακή 24 Μαΐου, 2020

1. (α) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης

$$x = te^{-\frac{t^2}{2}}, \quad y = e^{-t^2},$$

στα οποία η εφαπτομένη είναι (i) οριζόντια και (ii) κατακόρυφη.

(β) Στο ίδιο σχήμα, να γίνει η γραφική παράσταση των πολικών εξισώσεων  $r = \sqrt{2} \sin \theta$  και  $r^2 = \sin 2\theta$ . Στη συνέχεια να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που είναι εντός και των δύο καμπυλών.

(γ) Να βρεθεί ολόκληρο το μήκος τόξου του καρδιοειδούς  $r = a(1 + \cos \theta)$ ,  $a > 0$ .

2. (α) (i) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία  $(-2, 1)$  και διευθετούσα  $x = -4$ .

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες  $(-2, 1)$  και  $(4, 1)$  και κύριο άξονα ίσο με 10.

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστία  $(8, -1)$  και ασύμπτωτες  $3x - 4y = 13$  και  $3x + 4y = 5$ .

(β) Να προσδιοριστεί το είδος της κωνικής τομής για τις πιο κάτω εξισώσεις. Αν είναι παραβολή, να βρεθούν η εστία, η κορυφή και η διευθετούσα. Αν είναι έλλειψη, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες και οι κορυφές. Αν είναι υπερβολή, να βρεθούν το κέντρο, οι εστίες, οι κορυφές και οι ασύμπτωτες.

(i)  $2x^2 + 3y^2 + 12x - 24y + 60 = 0$

(ii)  $4y^2 - 9x^2 - 18x - 8y = 41$

(iii)  $4x^2 + 4x + 4y + 13 = 0$

Να γίνει η γραφική παράσταση των πιο πάνω κωνικών τομών.

3. (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων τα οποία είναι παράλληλα με το επίπεδο  $x + 2y - 2z = 1$  και είναι σε απόσταση 2 μονάδες από αυτό.

(β) Η ευθεία  $L_1$  διέρχεται από τα σημεία  $(1, 2, 6)$  και  $(2, 4, 8)$ . Η ευθεία  $L_2$  είναι η τομή του επιπέδου με εξίσωση  $x - y + 2z + 1 = 0$  και του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία  $(3, 2, -1)$ ,  $(0, 0, 1)$  και  $(1, 2, 1)$ . Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών  $L_1$  και  $L_2$ .

4. (α) Δίνεται ότι  $\mathbf{r}(t) = e^t \sin 2t\mathbf{i} + e^t \cos 2t\mathbf{j} + 2e^t\mathbf{k}$ . Να βρεθούν τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{B}$  και η καμπυλότητα  $\kappa$  στο σημείο όπου  $t = 0$ .

(β) Δίνεται ότι  $z = f(x, y)$  είναι λύση των εξισώσεων

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ναδειχθεί ότι  $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$  είναι επίσης λύση των πιο πάνω εξισώσεων.

(γ) Δίνεται ότι  $f(x, y)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η κατευθυντική παράγωγος της  $f(a, b)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $\mathbf{i} + \mathbf{j}$  είναι ίση με  $3\sqrt{2}$  και στην κατεύθυνση του διανύσματος  $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  είναι ίση με 5. Να βρεθεί η  $\nabla f(a, b)$ .

(δ) Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να βρεθεί το σημείο του επιπέδου  $x + 2y + 3z = 6$  που είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

5. (α) Να βρεθεί η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  στο σημείο  $(3, 2, 6)$  και να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί κατά προσέγγιση ο αριθμός  $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$ .

(β) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σχετικά ακρότατα της  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 5$ .

(γ) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της  $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$  στην κλειστή περιοχή που περικλείεται από το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $(-2, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 2)$  και  $(-2, -2)$ .

6. (α) Να σχεδιαστεί η περιοχή  $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$  και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R 3y^3 e^{xy} dx dy.$$

(β) Αφού γίνει η αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx.$$

(γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx.$$

(δ) Χρησιμοποιώντας διπλό ολοκλήρωμα, να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής εντός του καρδιοειδούς  $r = 1 + \cos \theta$  και εκτός του κύκλου  $r = 1$ .