ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 7

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^1 \int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\text{(iii)} \int_0^3 \int_0^2 y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{(iv)} \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{1+x+y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

2. (i) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού στο πρώτο ογδοημόριο που περικλείεται από την επιφάνεια $z = x^2$ και τα επίπεδα $x = 2,\ y = 3,\ y = 0$ και $z = 0$.

   (ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ και πάνω από το ορθογώνιο $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

   (iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = 1 + \mathrm{e}^x \sin y$ και τα επίπεδα $x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = \pi$ και $z = 0$.

   (iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = x\sec^2 y$ και τα επίπεδα $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = \frac{\pi}{4}$ και $z = 0$.

3. (i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R x\cos(xy)\cos^2 \pi x \mathrm{d}A,$$

   όπου $R = \{(x, y) : 0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le \pi\}$.

   (ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R \frac{y}{x^5+1}\mathrm{d}A,$$

   όπου $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \iint\limits_R \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}A,$$

   όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$.

$$\text{(ii)} \iint\limits_R \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}A,$$

   όπου R είναι η περιοχή που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \sqrt{x},\ y = 0$ και $x = 1$.

$$\text{(iii)} \iint\limits_R y\mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από τις παραβολές $x = y^2$ και $x = 8 - y^2$.

(iv) $$\iint_R (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$ και $y = \sqrt{3}x$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$.

5. (i) Να βρεθεί όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 3 - x$.

   (ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από πάνω από την επιφάνεια $z = 1 - x^2 - y^2$ και από κάτω από το xy-επίπεδο.

   (iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που είναι κάτω από την επιφάνεια $z = xy$ και πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(1, 1),\ (4, 1)$ και $(1, 2)$.

   (iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τους κυλίνδρους $z = x^2$ και $y = x^2$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $y = 4$.

6. Αφού γίνει αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

   (i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{4x}^4 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$ (ii) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   (iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

7. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

   (i) $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   (ii) $$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad a > 0$$

   (iii) $$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

8. (i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r = 4\sin\theta$ και εκτός της $r = 2$.

   (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r = 1$ και εκτός της $r = 1 + \cos\theta$.

9. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας

   (i) του τμήματος του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο με κορυφές $(0, 0),\ (4, 0),\ (0, 2)$ και $(4, 2)$,

   (ii) του τμήματος της επιφάνειας $z = y^2 - x^2$ το οποίο βρίσκεται μεταξύ των κυλίνδρων $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$,

   (iii) του τμήματος της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 1$.

10. Χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Gauss,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

11. (i) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x - 2y,\ v = 2x + y$, να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R \frac{x-2y}{2x+y} \mathrm{d}A$$

όπου R είναι η ορθογώνια περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες

$$x - 2y = 1,\ x - 2y = 4,\ 2x + y = 1,\ 2x + y = 3.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x + y,\ v = x - y$, να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R (x-y)\mathrm{e}^{x^2-y^2} \mathrm{d}A$$

όπου R είναι η ορθογώνια περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες

$$x + y = 0,\ \ x + y = 1,\ \ x - y = 1,\ \ x - y = 4.$$

(iii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = \frac{1}{2}(x+y),\ v = \frac{1}{2}(x-y)$, να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y) \mathrm{d}A$$

όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0),\ (2,0),\ (1,1)$.

12. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\iint_R \frac{y-4x}{y+4x} \mathrm{d}A$, όπου R είναι η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες

$$y = 4x,\ y = 4x + 2,\ y = 2 - 4x,\ y = 5 - 4x.$$

(ii) $\displaystyle\iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} \mathrm{d}A$, όπου R είναι η τριγωνική περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες

$$y = 0,\ y = x,\ x + y = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) $\displaystyle\iint_R \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}} \mathrm{d}A$, όπου R είναι περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από το τραπέζιο με κορυφές $(0,1),\ (1,0),\ (0,4),\ (4,0)$.