

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 6

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f :

(i) $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$ (ii) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{y^2 + 3}$

(iii) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ (iv) $f(x, y, z) = z + \ln(1 - x^2 - y^2)$

2. (i) Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1, -2, 0) (β) (1, 0, 3) (γ) (0, 0, 0)

(ii) Έστω $f(x, y, z) = xyz + 3$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1, 0, 2) (β) (-2, 4, 1) (γ) (0, 0, 0)

3. Να βρεθεί η περιοχή όπου η f είναι συνεχής.

(i) $f(x, y, z) = 3x^2 e^{yz} \cos(xyz)$ (ii) $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

(iii) $f(x, y, z) = \frac{y+1}{x^2+y^2-1}$ (iv) $f(x, y, z) = \sin \sqrt{x^2 + y^2 + 3z^2}$

4. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2 y^3)$ (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

(v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$

5. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y - 1)^2} \right]$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + (y - 1)^2} \right]$

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

7. Να βρεθούν οι $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$ για τις πιο κάτω συναρτήσεις

(i) $f(x, y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$ (ii) $f(x, y) = x^3 e^{-y} + y^3 \sec \sqrt{x}$

(iii) $f(x, y) = (y^2 \tan x)^{-\frac{4}{3}}$ (iv) $f(x, y) = \cosh(\sqrt{x}) \sinh^2(xy^2)$

8. Χρησιμοποιώντας πλεγμένη παραγωγή, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(i) $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$ (ii) $x^2 + z \sin(xyz) = 0$

9. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(i) $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$

(ii) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(iii) $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

10. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(-1, 1, 5)$ της καμπύλης η οποία είναι η τομή της επιφάνειας $z = x^2 + 4y^2$ και

(i) του επιπέδου $x = -1$ (ii) του επιπέδου $y = 1$

11. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ υπάρχουν, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

12. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθεί η $\frac{dz}{dt}$

(i) $z = 3x^2y^3, \quad x = t^4, \quad y = t^2$

(ii) $z = \ln(2x^2 + y), \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^{\frac{2}{3}}$

(iii) $z = 3 \cos x - \sin xy, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = 3t$

(iv) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}, \quad x = \ln t, \quad y = t$

13. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$

(i) $z = 3x - 2y, \quad x = u + v \ln u, \quad y = u^2 - v \ln v$

(ii) $z = e^{x^2y}, \quad x = \sqrt{uv}, \quad y = \frac{1}{v}$

(iii) $z = \cos x \sin y, \quad x = u - v, \quad y = u^2 + v^2$

(iv) $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), \quad x = e^u \sin v, \quad y = e^u \cos v$

14. (i) Έστω $z = e^x f(x - y)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

(ii) Έστω $z = f(y + cx) + g(y - cx)$, όπου $c \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

15. Χρησιμοποιώντας ολικό διαφορικό, να βρεθεί κατά προσέγγιση η αλλαγή της $f(x, y)$ όταν (x, y) αλλάζει από το P στο Q .

(i) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy}$, $P(-1, -2)$, $Q(-1.02, -2.04)$

(ii) $f(x, y) = \ln \sqrt{1+xy}$, $P(0, 2)$, $Q(-0.09, 1.98)$

16. (i) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$ τέμνονται στο $(3, 4, 5)$ και ότι έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο σε αυτό το σημείο.

(ii) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ και $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ τέμνονται στο $(2, 2, 2\sqrt{2})$ και ότι έχουν εφαπτόμενα επίπεδα τα οποία τέμνονται κάθετα σε αυτό το σημείο.

17. Η γωνία θ ενός ορθογώνιου τριγώνου υπολογίζεται από τον τύπο

$$\theta = \sin^{-1} \frac{a}{c}$$

όπου a είναι το μήκος της πλευράς που είναι απέναντι του θ και c είναι το μήκος της υποτεινουσας. Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις $a = 3\text{cm}$ και $c = 5\text{cm}$ έχουν η κάθε μια μέγιστο δυνατό σφάλμα ίσο με 0.01cm . Χρησιμοποιώντας διαφορικά, να βρεθεί κατά προσέγγιση το μέγιστο δυνατό σφάλμα στον υπολογισμό της θ .

18. Να βρεθούν όλα τα σημεία τομής της ευθείας $x = -1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 2t + 7$ και της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$. Για κάθε σημείο τομής, να βρεθεί το συννημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η κάθετος στο σημείο με τη δοσμένη ευθεία.

19. Να βρεθεί η κατευθυντική παράγωγος της f στο σημείο P στην κατεύθυνση του \mathbf{a} .

(i) $f(x, y) = y^2 \ln x$, $P(1, 4)$, $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(ii) $f(x, y) = e^x \cos y$, $P(0, \frac{\pi}{4})$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

(iii) $f(x, y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, $P(-2, 2)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

(iv) $f(x, y) = xe^y - ye^x$, $P(0, 0)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

20. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση στην οποία η f έχει τη μέγιστη αύξηση στο σημείο P . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο P σε αυτή την κατεύθυνση.

(i) $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2$, $P(-1, -3)$

(ii) $f(x, y) = e^{xy}$, $P(2, 3)$

(iii) $f(x, y) = \cos(3x - y)$, $P(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

(iv) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$, $P(3, 1)$

21. (i) Έστω $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{u} για το οποίο $D_{\mathbf{u}}f(2, 3) = 0$.

(ii) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{u} το οποίο είναι κάθετο στο $P(1, -2)$ στην ισοσταθμική καμπύλη της $f(x, y) = 4x^2y$ που διέρχεται από το σημείο P .

(iii) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{u} το οποίο είναι κάθετο στο $P(2, -3)$ στην ισοσταθμική καμπύλη της $f(x, y) = 3x^2y - xy$ που διέρχεται από το σημείο P .

22. Δίνεται ότι $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = -5$ αν $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ και $D_{\mathbf{v}}f(1, 2) = 10$ αν $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Να βρεθούν:
- (i) $f_x(1, 2), f_y(1, 2)$
- (ii) η κατευθυντική παράγωγος της f στο σημείο $(1, 2)$ προς την κατεύθυνση της αρχής των αξόνων.
23. Η θερμοκρασία στο σημείο (x, y) μιας μεταλλικής πλάκας στο επίπεδο xy ορίζεται από τον τύπο $T(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.
- (i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο $(1, 1)$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
- (ii) Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στο $(1, 1)$ και θέλει να περπατήσει στην κατεύθυνση όπου η θερμοκρασία έχει την μέγιστη μείωση. Να βρεθεί αυτή η κατεύθυνση.
24. Αν f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε να αποδειχθεί ότι
- (i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- (ii) $\nabla(cf) = c\nabla f$, όπου c είναι σταθερά.
25. Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία.
- (i) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$
- (ii) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$
- (iii) $f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$
- (iv) $f(x, y) = y \sin x$
26. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στο δοσμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο P .
- (i) $f(x, y) = xy - x - 3y$ και P είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(0,4)$ και $(5,0)$.
- (ii) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ και P είναι η τετραγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ και $(2,0)$.
- (iii) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ και P είναι η κυκλική περιοχή $x^2 + y^2 \leq 4$.
27. (i) Να βρεθούν όλα τα σημεία πάνω στο επίπεδο $x + y + z = 5$ στο πρώτο οκταήμιο για τα οποία η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy^2z^2$ έχει μέγιστη τιμή.
- (ii) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $x^2 - yz = 5$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.
28. (i) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3t$, $y = 2t$, $z = t$ και $x = 2t$, $y = 2t + 3$, $z = 2t$.
- (ii) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(-1, 3, 2)$ από το επίπεδο $x - 2y + z = 4$.

29. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να βρεθούν τα ακρότατα της f υποκειμένη στις δοσμένες συνθήκες. Επίσης να βρεθούν τα σημεία στα οποία συμβαίνουν οι τα ακρότατα.

(i) $f(x, y) = xy, \quad 4x^2 + 8y^2 = 16$

(ii) $f(x, y) = x^2 - y, \quad x^2 + y^2 = 25$

(iii) $f(x, y, z) = 3x + 6y + 2z, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$

(iv) $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

30. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα.

(i) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας $y = 2x + 3$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο $(4, 2)$.

(ii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x + 2y + z = 1$ το οποίο είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

(iii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $4x + 3y + z = 2$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο $(1, -1, 1)$.

(iv) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $xy - z^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.