ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 4

1. Να περιγραφεί η επιφάνεια της οποίας η εξίσωση δίνεται πιο κάτω.

   (i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$

   (ii) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$

   (iv) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$

2. (i) Έστω $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές c_1, c_2, c_3 τέτοιες ώστε

   $$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (-1, 1, 5).$$

   (ii) Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{w} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές c_1, c_2, c_3 τέτοιες ώστε

   $$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

3. Έστω $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Να περιγραφεί το σύνολο των σημείων (x, y, z) για τα οποία

   (i) $\|\mathbf{r}\| = 2$ (ii) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 3$ (iii) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \leq 1$

4. (i) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{u} = (7, 0, -6)$, αλλά με διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

   (ii) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, αλλά με διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

5. Να δειχθεί ότι τα διευθύνοντα συνημίτονα ενός διανύσματος ικανοποιούν την εξίσωση

   $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ και $P(-3, 1, 2)$.

   (i) Να βρεθεί $\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$

   (ii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

7. Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

   $$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

   όπου c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

   $$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

   Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

8. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές $A(1,0,1)$, $B(0,2,3)$ και $C(2,1,0)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το μήκος του ύψους από τη κορυφή C στη πλευρά AB.

9. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

10. (i) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η ευθεία $x = -2,\ y = 4 + 2t,\ z = -3 + t$ τέμνει το xy-επίπεδο, το xz-επίπεδο και το yz-επίπεδο.

    (ii) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η ευθεία $x = 2 - t,\ y = 3t,\ z = -1 + 2t$ τέμνει το επίπεδο $2y + 3z = 6$.

    (iii) Να βρεθεί που η ευθεία $x = 1 + t,\ y = 3 - t,\ z = 2t$ τέμνει το κύλινδρο $x^2 + y^2 = 16$.

11. Αν a, b και c είναι μη-μηδενικές σταθερές, να δειχθεί ότι κάθε σημείο της ευθείας $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

    και αντίθετα, κάθε σημείο (x, y, z) που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις βρίσκεται πάνω στην ευθεία. (Οι πιο πάνω εξισώσεις καλούνται **συμμετρικές εξισώσεις** της ευθείας γραμμής.)

12. Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω ζεύγη ευθειών τέμνονται. Στη περίπτωση που τέμνονται, να βρεθεί το σημείο τομής τους:

    (i) $x = 2 + t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + t$ και $x = 2 + t,\ y = 3 + 4t,\ z = 4 + 2t$

    (ii) $x = -1 + 4t,\ y = 3 + t,\ z = 1$ και $x = -13 + 12t,\ y = 1 + 6t,\ z = 2 + 3t$

    (iii) $x = 1 + 7t,\ y = 3 + t,\ z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t,\ y = 6,\ z = 7 + 2t$

    (iv) $x = 2 + 8t,\ y = 6 - 8t,\ z = 10t$ και $x = 3 + 8t,\ y = 5 - 3t,\ z = 6 + t$

13. (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(-2, 1, 1)$ και της ευθείας $x = 3 - t,\ y = t,\ z = 1 + 2t$.

    (ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(1, 4, -3)$ και της ευθείας $x = 2 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$.

    (iii) Να επαληθευθεί ότι οι ευθείες $x = 2 - t,\ y = 2t,\ z = 1 + t$ και $x = 1 + 2t,\ y = 3 - 4t,\ z = 5 - 2t$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

14. Έστω οι ευθείες L_1 και L_2 με εξισώσεις

$$x = 4t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t \ \text{ και } \ x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + 4t,$$

    αντίστοιχα.

    (i) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών L_1 και L_2.

    (ii) Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες L_1 και L_2.

    (iii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στις ευθείες L_1 και L_2 και διέρχεται από το σημείο τομής τους.

15. (i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2, -5)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x - y + z = 1$ και $x + y - 2z = 3$.

    (ii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.

    (iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(2, 0, 3)$ και την ευθεία $x = -1 + t,\ y = t,\ z = -4 + 2t$.

16. Να δειχθεί ότι οι ευθείες

    $$x = -1 + 4t, \quad y = 3 + t, \quad z = 1$$

    και

    $$x = -13 + 12t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 2 + 3t$$

    τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίον ορίζουν.

17. (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(0, 1, 5)$ και του επιπέδου $3x+6y-2z = 5$.

    (ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων επιπέδων $2x - 3y + 4z = 7$ και $4x - 6y + 8z = 3$.

    (iii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3 - t,\ y = 4 + 4t,\ z = 1 + 2t$ και $x = t,\ y = 3,\ z = 2t$.

18. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που έχει κέντρο $(2, 1 - 3)$ και είναι εφαπτόμενη στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.

19. (i) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ σε κυλινδρικές.

    (ii) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(4, \frac{\pi}{6}, 3)$ σε καρτεσιανές.

    (iii) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(1, \sqrt{3}, -2)$ σε σφαιρικές.

    (iv) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ σε καρτεσιανές.

    (v) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3)$ σε σφαιρικές.

    (vi) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $(5, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3})$ σε κυλινδρικές.