

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

### Κεφάλαιο 1

- 1** (i)  $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$   
(ii)  $x^2 - y^2 = 1, x \leq -1, y \geq 0$   
(iii)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$   
(iv)  $y = x - 1, x \geq 1, y \geq 0$
- 2** (i)  $x = \cos t, y = \sin t, \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$   
(ii)  $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$   
(iii)  $x = t^2, y = t, -1 \leq t \leq 1$   
(iv)  $x = 1 + 4 \cos t, y = -3 + 4 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- 3**  $y = x$  και  $y = -x$
- 4** (i) οριζόντια εφαπτομένη στα  $(0, 0)$  και  $(2, -4)$ , κατακόρυφη εφαπτομένη  $(2, -4)$  και  $(-2, -2)$   
(ii) οριζόντια εφαπτομένη στα  $(\frac{1}{2}, -1)$  και  $(-\frac{1}{2}, 1)$ , δεν υπάρχει κατακόρυφη εφαπτομένη  
(iii) οριζόντια εφαπτομένη στα  $(1, e)$  και  $(1, \frac{1}{e})$ , κατακόρυφη εφαπτομένη  $(e, 1)$  και  $(\frac{1}{e}, 1)$
- 5** (i)  $\frac{256}{15}$   
(ii)  $\frac{3}{8}\pi a^2$   
(iii)  $\frac{\pi}{8}$   
(iv)  $\frac{9\pi}{2}$
- 6** (i)  $y' = -2 \sin t, y'' = -1$  (ii)  $y' = -\tan \theta, y'' = \frac{1}{3 \cos^4 \theta \sin \theta}$
- 7** (i)  $5x + 3y - 30 = 0, 3x - 5y + 16 = 0$  (ii)  $2x + 2y - a = 0, x - y = 0$
- 8** (i)  $\ln(1 + \sqrt{2})$  (ii) 16
- 9**  $\frac{2\sqrt{2}\pi(2e^\pi + 1)}{5}$
- 10**  $\frac{64\pi}{3}$

### Κεφάλαιο 2

- 1** (i)  $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$  (ii)  $y = x^2$  (iii)  $3x + 2y = 6$
- 2** (i)  $r = 6 \sin \theta$  (ii)  $r^2 \sin 2\theta = \frac{9}{2}$  (iii)  $r = \tan \theta$
- 4** (i)  $4\pi$  (ii)  $2a^2$  (iii)  $\frac{5}{4}\pi$  (iv)  $100 \cos^{-1} \frac{3}{5} - 48$  (v)  $2\pi + \frac{9}{4}\sqrt{3}$
- 5** (i)  $-1 - \sqrt{2}$  (ii)  $\frac{3\sqrt{3}}{5}$  (iii)  $\frac{3}{4}$
- 6** (i)  $2\pi a$  (ii) 2 (iii)  $\frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$
- 7** (i)  $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$  (ii)  $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
- 8**  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \sin^{-1} \frac{1}{4}, \pi - \sin^{-1} \frac{1}{4}$
- 9**  $r = \pm \sin 2\theta$
- 10** (i)  $\frac{16}{3}$  (ii) 4
- 11**  $2\sqrt{2}\pi$

### Κεφάλαιο 3

- 1** (i) έλλειψη με κορυφές  $\pm\sqrt{2}, 1$  και εστίες  $(\pm 1, 1)$ .  
(ii) παραβολή με κορυφή  $(0, 4)$  και εστία  $(\frac{3}{2}, 4)$ .  
(iii) υπερβολή με κορυφές  $0, 1$  και  $(0, -3)$  και εστίες  $(0, -1 \pm \sqrt{5})$ .

- (iv) έλλειψη με κορυφές  $-\frac{1}{2}, \pm 1$  και εστίες  $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ .
- 2** (i)  $(x-3)^2 = 16(y-2)$   
(ii)  $y^2 = 12(x+1)$   
(iii)  $y-3 = 2(x-2)^2$   
(iv)  $x = 3y^2 + y - 1$
- 3** (i)  $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$   
(ii)  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$   
(iii)  $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$   
(iv)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 4** (i)  $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{39} = 1$   
(ii)  $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$   
(iii)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$   
(iv)  $\frac{5(y-4)^2}{16} - \frac{5(x-2)^2}{64} = 1$
- 5**  $\frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$
- 6**  $8xy - 4x - 4y + 1 = 0$
- 7** (i)  $4y' = x'^2$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφή  $(0, 0)$ , εστία  $(0, 1)$ , διευθετούσα  $y' = -1$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφή  $(0, 0)$ , εστία  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , διευθετούσα  $y = x - \sqrt{2}$   
(ii)  $4x' = y'^2$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφή  $(0, 0)$ , εστία  $(1, 0)$ , διευθετούσα  $x' = -1$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφή  $(0, 0)$ , εστία  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ , διευθετούσα  $y = -\sqrt{3}x - 2$   
(iii)  $4(x'-1) = y'^2$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφή  $(1, 0)$ , εστία  $(2, 0)$ , διευθετούσα  $x' = 0$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφή  $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ , εστία  $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ , διευθετούσα  $y = -\frac{4}{3}x$
- 8** (i)  $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(\pm 4, 0)$ , εστίες  $(\pm\sqrt{7}, 0)$ , άκρα μικρού άξονα  $(0, \pm 3)$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $\pm(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ , εστίες  $\pm(\frac{4\sqrt{7}}{5}, \frac{3\sqrt{7}}{5})$ , άκρα μικρού άξονα  $\pm(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$   
(ii)  $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(\pm 4, 0)$ , εστίες  $(\pm\sqrt{7}, 0)$ , άκρα μικρού άξονα  $(0, \pm 3)$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $\pm(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ , εστίες  $\pm(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}})$ , άκρα μικρού άξονα  $\pm(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$   
(iii)  $\frac{x'^2}{4} + \frac{(y'+2)^2}{9}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(0, 1)$ ,  $(0, -5)$ , εστίες  $(0, -2 \pm \sqrt{5})$ , άκρα μικρού άξονα  $(\pm 2, -2)$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$ , εστίες  $(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{15}}{2})$ ,  $(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{15}}{2})$ , άκρα μικρού άξονα  $(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ ,  $(1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$
- 9** (i)  $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(\pm 4, 0)$ , εστίες  $(\pm\sqrt{5}, 0)$ , ασύμπτωτες  $y' = \pm \frac{x'}{2}$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $\pm(2\sqrt{3}, 2)$ , εστίες  $\pm(\sqrt{15}, \sqrt{5})$ , ασύμπτωτες  $y = \frac{5\sqrt{3} \pm 8}{11}x$   
(ii)  $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{9}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(0, \pm 2)$ , εστίες  $(0, \pm\sqrt{13})$ , ασύμπτωτες  $y' = \pm \frac{2}{3}x'$   
σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $\pm(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ , εστίες  $\pm(-\frac{3\sqrt{13}}{5}, \frac{4\sqrt{13}}{5})$ , ασύμπτωτες  $y = \frac{x}{18}$ ,  $y = \frac{17x}{6}$   
(iii)  $\frac{x'^2}{9} - \frac{(y'-4)^2}{4}$  σε  $x'y'$  συντεταγμένες: κορυφές  $(\pm 3, 4)$ , εστίες  $(\pm\sqrt{13}, 4)$ , ασύμπτωτες  $y' = \pm \frac{2}{3}x' + 4$

σε  $xy$  συντεταγμένες: κορυφές  $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{11}{\sqrt{5}})$ ,  $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ , εστίες  $(\frac{-4+2\sqrt{13}}{\sqrt{5}}, \frac{8+\sqrt{13}}{\sqrt{5}})$ ,  $(\frac{-4-2\sqrt{13}}{\sqrt{5}}, \frac{8-\sqrt{13}}{\sqrt{5}})$ , ασύμπτωτες  $y = \frac{7}{4}x + 3\sqrt{5}$ ,  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{5}}{2}$

- 10** (i) έλλειψη,  $e = \frac{4}{5}$ , διευθετούσα  $y = -1$ , κορυφές  $(4, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{4}{9}, \frac{3\pi}{2})$   
(ii) παραβολή,  $e = 1$ , διευθετούσα  $y = \frac{2}{3}$ , κορυφή  $(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{2})$   
(iii) παραβολή,  $e = 1$ , διευθετούσα  $x = \frac{3}{2}$ , κορυφή  $(\frac{3}{4}, 0)$   
(iv) έλλειψη,  $e = \frac{1}{3}$ , διευθετούσα  $x = \frac{9}{2}$ , κορυφές  $(\frac{9}{8}, 0)$ ,  $(\frac{9}{4}, \pi)$   
(v) υπερβολή,  $e = \frac{5}{4}$ , διευθετούσα  $y = \frac{8}{5}$ , κορυφές  $(\frac{8}{9}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(-8, \frac{3\pi}{2})$   
(vi) υπερβολή,  $e = 2$ , διευθετούσα  $x = -\frac{3}{8}$ , κορυφές  $(-\frac{3}{4}, 0)$ ,  $(\frac{1}{4}, \pi)$

#### Κεφάλαιο 4

- 1** (i) σφαίρα με κέντρο  $(1, 3, 4)$ , ακτίνα 5  
(ii) σφαίρα με κέντρο  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ , ακτίνα  $\frac{3}{4}\sqrt{6}$   
(iii) το σημείο  $(-1, 1, -1)$   
(iv) Δεν έχει γραφική παράσταση
- 2** (i)  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = 3$  (ii) Δεν υπάρχουν
- 3** (i) σφαίρα με κέντρο  $(0, 0, 0)$  και ακτίνα 2 (ii) σφαίρα με κέντρο  $(x_0, y_0, z_0)$  και ακτίνα 3  
(iii) Όλα τα σημεία πάνω ή μέσα στη σφαίρα με κέντρο  $(x_0, y_0, z_0)$  και ακτίνα 1
- 4** (i)  $14\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$  (ii)  $6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- 6** (i)  $4/\sqrt{29}$  (ii)  $\sqrt{564/29}$
- 7**  $c_1 = \frac{3}{7}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $c_3 = \frac{1}{21}$
- 8**  $E = \frac{\sqrt{26}}{2}$ ,  $h = \frac{\sqrt{26}}{3}$
- 10** (i) Το  $xy$ -επίπεδο στο  $(-2, 10, 0)$ , το  $xz$ -επίπεδο στο  $(-2, 0, -5)$  και δεν τέμνει το  $yz$ -επίπεδο.  
(ii)  $(5/4, 9/4, 1/2)$  (iii)  $(0, 4, -2)$  και  $(4, 0, 6)$
- 12** (i) τέμνονται στο  $(1, -1, 2)$  (ii) τέμνονται στο  $(-17, -1, 1)$  (iii) δεν τέμνονται, δεν είναι παράλληλες  
(iv) δεν τέμνονται, δεν είναι παράλληλες
- 13** (i)  $2\sqrt{5}$  (ii)  $4\sqrt{\frac{10}{11}}$  (iii)  $\sqrt{\frac{35}{6}}$
- 14** (i)  $(2, 0, 3)$  (ii)  $\theta \approx 48^\circ$  (iii)  $x = 2 + 3t$ ,  $y = 7t$ ,  $z = 3 + t$
- 15** (i)  $x + 5y + 3z = -16$  (ii)  $x + y - 3z = 6$  (iii)  $7x - y - 3z = 5$
- 16**  $x - 4y + 4z = -9$
- 17** (i)  $D = \frac{9}{7}$  (ii)  $D = \frac{11}{\sqrt{116}}$  (iii)  $D = \sqrt{6}$
- 18**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$
- 19** (i)  $(8, \frac{\pi}{6}, -4)$  (ii)  $2\sqrt{3}, 2, 3$  (iii)  $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$  (iv)  $(\frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{5}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$  (v)  $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$  (vi)  $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{5}{2})$

#### Κεφάλαιο 5

- 1** (i)  $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$   
(ii)  $(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$
- 2** (i)  $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$   
(ii)  $-\mathbf{i} + e^{-\pi}\mathbf{j} + \sqrt{\pi}\mathbf{k}$   
(iii)  $\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \mathbf{k}$   
(iv)  $3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \sin 2\mathbf{k}$
- 3** (i)  $\cos \theta = \frac{6}{\sqrt{258}} \Rightarrow \theta \approx 68^\circ$   
(ii)  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \theta \approx 74^\circ$

- 4** (i)  $4\mathbf{i} + 8(4u + 1)\mathbf{j}$   
(ii)  $-3\pi \sin \pi u \mathbf{i} + 3\pi \cos \pi u \mathbf{j}$
- 7** (i)  $\frac{t^3}{3}\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \ln |t|\mathbf{k} + \mathbf{c}$   
(ii)  $-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} + \mathbf{c}$   
(iii)  $\frac{1}{2}(e^2 - 1)\mathbf{i} + (1 - e^{-1})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$   
(iv)  $\frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{i} + \frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- 8** (i)  $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$   
(ii)  $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{i} + (3 + \sin t)\mathbf{j} + (2 - t)\mathbf{k}$   
(iii)  $\mathbf{r}(t) = 2(t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t^2 + 1}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{k}$   
(iv)  $\mathbf{r}(t) = (2 + 2t - \sin 2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (2t - 1 + e^{-t})\mathbf{k}$
- 9** (i)  $2\pi\sqrt{10}$   
(ii)  $\frac{3}{2}$   
(iii)  $e - e^{-1}$   
(iv)  $\sqrt{3}$
- 10** (i)  $x = \frac{1}{9} \left[ (27s + 13\sqrt{13})^{\frac{2}{3}} - 4 \right], y = \frac{1}{27} \left[ (27s + 13\sqrt{13})^{\frac{2}{3}} - 4 \right]^{\frac{3}{2}}, 0 \leq s \leq \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$   
(ii)  $x = (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \cos[\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)], y = (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \sin[\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)], 0 \leq s \leq \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$   
(iii)  $x = \sin(1 + \frac{s}{2}), y = \cos(1 + \frac{s}{2}), z = \sqrt{3}(1 + \frac{s}{2}), s \geq 0$   
(iv)  $x = (\sqrt{2s + 1} - 1) \cos(\sqrt{2s + 1} - 1), y = (\sqrt{2s + 1} - 1) \sin(\sqrt{2s + 1} - 1), z = \frac{2}{3}\sqrt{2}(\sqrt{2s + 1} - 1)^{\frac{3}{2}}, s \geq 0$
- 11** (i)  $\frac{9}{2}$   
(ii)  $9 - 2\sqrt{6}$
- 12** (i)  $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) = -\mathbf{j}$   
(ii)  $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$   
(iii)  $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$   
(iv)  $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(\ln 2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
- 13** (i)  $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$   
(ii)  $\mathbf{N} = \mathbf{j}$   
(iii)  $\mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$
- 15** (i)  $\kappa(x) = \frac{2|x|}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}, \kappa(0) = 0$   
(ii)  $\kappa(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}, \kappa(1) = \frac{e^{-1}}{(1+e^{-2})^{\frac{3}{2}}}$   
(iii)  $\kappa = \frac{36}{89\sqrt{89}}$
- 16** (i)  $\kappa = \frac{1}{16}$   
(ii)  $\kappa = \frac{6}{13\sqrt{13}}$   
(iii)  $\kappa = \frac{a}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$
- 17** (i)  $\kappa(1) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$   
(ii)  $\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2a\sqrt{2}}$   
(iii)  $\kappa(1) = \frac{1}{\sqrt{5}e^2}$
- 18** (i)  $\rho_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \rho_{max} = 2$   
(ii)  $\rho_{min} = 2\sqrt{2}$

- 19** (i)  $2t + \frac{1}{t}$   
(ii)  $2t + \frac{1}{t}$   
(iii)  $8 + \ln 3$

**20** (i)  $\mathbf{T}(5) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

- 21** (i)  $\|\mathbf{v}\|_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \mathbf{r} = \frac{3}{16}\mathbf{i} - \frac{1}{16}\mathbf{j}$   
(ii)  $\|\mathbf{v}\|_{min} = 3, \|\mathbf{v}\|_{max} = 6$   
(iii)  $\|\mathbf{v}\|_{min} = 2\sqrt{5}, \|\mathbf{v}\|_{max} = 2\sqrt{13}$

**22**  $\mathbf{r} = -\frac{19}{16}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{3}{16}\mathbf{k}$

- 23** (i)  $a_N = \frac{18}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$   
(ii)  $a_N = \frac{4e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

- 24** (i)  $x = 490\sqrt{2}t, y = 490\sqrt{2}t - 5t^2$   
(ii)  $y_{max} = 24010\text{m}$   
(iii)  $x_{max} = 96040\text{m}$   
(iv)  $980 \text{ m/sec}$

**25**  $640\text{m}$

- 26** (i)  $t = \frac{1}{2}\text{sec}$   
(ii)  $\sqrt{281} \text{ m/sec}$   
(iii) Θα κτυπήσουν στο έδαφος και οι δύο την ίδια χρονική στιγμή, όταν  $t = \frac{1}{2}$ .

## Κεφάλαιο 6

- 1** (i) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών  $y = 1 - x$  και  $y = -1 - x$ .

- (ii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών  $x = \pm 2$ .  
(iii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω και μέσα στη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .  
(iv) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ .

- 2** (i) (α)  $x^2 + y^2 - z = 5$ , (β)  $x^2 + y^2 - z = -2$ , (γ)  $x^2 + y^2 - z = 0$

- (ii) (α)  $xyz = 0$ , (β)  $xyz = -8$ , (γ)  $xyz = 0$

- 3** (i) όλα τα σημεία στον  $\mathbb{R}^3$ .

- (ii) όλα τα σημεία μέσα στην σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 2.

- (iii) όλα τα σημεία στον  $\mathbb{R}^3$ , εκτός αυτά που βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο  $x^2 + y^2 = 1$ .  
(iv) όλα τα σημεία στον  $\mathbb{R}^3$ .

- 4** (i) 0

- (ii)  $+\infty$  (Δεν υπάρχει)

- (iii) 1

- (iv) Δεν υπάρχει

- (v)  $+\infty$  (Δεν υπάρχει)

- (vi) 0

- 5** (i)  $\frac{\pi}{2}$   
(ii)  $-\frac{\pi}{2}$

**7** (i)  $f_x(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{y^2+x^2}, f_y(x, y) = -\frac{xy^{-\frac{3}{2}}}{y^2+x^2} - \frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(ii)  $f_x(x, y) = 3x^2e^{-y} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^3 \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}, f_y(x, y) = -x^3e^{-y} + 3y^2 \sec \sqrt{x}$

(iii)  $f_x(x, y) = -\frac{4}{3}y^2 \sec^2 x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}, f_y(x, y) = \frac{8}{3}y \tan x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$

(iv)  $f_x(x, y) = 2y^2 \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sinh \sqrt{x} \sinh^2(xy^2)$ ,  $f_y(x, y) = 4xy \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2)$

**8** (i)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(ii)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+yz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz)+\sin(xyz)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz)+\sin(xyz)}$

**10** (i) 8 (ii) -2

**12** (i)  $42t^{13}$

(ii)  $\frac{2(3+t^{-\frac{1}{3}})}{3(2t+t^{\frac{2}{3}})}$

(iii)  $3t^{-2} \sin(\frac{1}{t})$

(iv)  $\frac{1-2t^4-8t^4 \ln t}{2t\sqrt{1+\ln t-2t^4 \ln t}}$

**13** (i)  $\frac{\partial z}{\partial u} = 3 + 3\frac{v}{u} - 4u$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = 2 + 3 \ln u + 2 \ln v$

(ii)  $\frac{\partial z}{\partial y} = e^u$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

(iii)  $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2u \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$ ,  
 $\frac{\partial z}{\partial v} = \sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2v \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$

(iv)  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2e^{2u}}{1+e^{4u}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

**15** (i)  $df = 0.03$

(ii)  $df = -0.09$

**16** (i) Οι δύο επιφάνειες έχουν ως κάθετο διάνυσμα το  $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

(ii)  $\mathbf{n}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**17**  $|d\theta| \leq 0.004$

**18**  $(-2, 1, 5)$ ,  $(0, 3, 9)$

Στο  $(-2, 1, 5)$ ,  $\cos \theta = \frac{4}{3\sqrt{14}}$ . Στο  $(0, 3, 9)$ ,  $\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{222}}$

**19** (i)  $-8\sqrt{2}$  (ii)  $\frac{7}{\sqrt{58}}$  (iii)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (iv)  $\frac{7}{\sqrt{29}}$

**20** (i)  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ ,  $\|\nabla f(-1, -3)\| = -2\sqrt{10}$

(ii)  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ ,  $\|\nabla f(2, 3)\| = -\sqrt{13}e^6$

(iii)  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ ,  $\|\nabla f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})\| = -\sqrt{5}$

(iv)  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ ,  $\|\nabla f(3, 1)\| = -\frac{\sqrt{5}}{8}$

**21** (i)  $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

(ii)  $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(iii)  $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{1189}}(-33\mathbf{i} + 10\mathbf{j})$

**22** (i)  $f_x(1, 2) = 5$ ,  $f_y(1, 2) = 10$

(ii)  $D_{\mathbf{u}}f = -5\sqrt{5}$

**23** (i)  $DT = \frac{1}{9\sqrt{5}}$

(ii)  $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

**25** (i) Σαγματικό σημείο:  $(0, 0)$ , σχετικά ελάχιστα:  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$

(ii) Σαγματικό σημείο:  $(0, 0)$

(iii) Σαγματικά σημεία:  $(0, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(4, 0)$ , σχετικό ελάχιστο:  $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

(iv) Σαγματικά σημεία:  $(n\pi, 0)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**26** (i) Απόλυτο μέγιστο = 0, απόλυτο ελάχιστο = -12

(ii) Απόλυτο μέγιστο = 3, απόλυτο ελάχιστο = -1

(iii) Απόλυτο μέγιστο =  $33/4$ , απόλυτο ελάχιστο =  $-1/4$

**27** (i)  $(1, 2, 2)$

(ii)  $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$

**28** (i)  $\sqrt{6}$

(ii)  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

**29** (i) Μέγιστο  $\sqrt{2}$  στα σημεία  $(-\sqrt{2}, -1)$  και  $(\sqrt{2}, 1)$ , ελάχιστο  $-\sqrt{2}$  στα σημεία  $(-\sqrt{2}, 1)$  και  $(\sqrt{2}, -1)$

(ii) Μέγιστο  $\frac{101}{4}$  στα σημεία  $(\pm\frac{\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2})$ , ελάχιστο  $-5$  στο σημείο  $(0, 5)$

(iii) Μέγιστο  $35$  στο σημείο  $(3, 3, 4)$ , ελάχιστο  $-35$  στο σημείο  $(-3, -3, -4)$

(iv) Μέγιστο  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$  στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

ελάχιστο  $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$  στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

**30** (i)  $(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$

(ii)  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

(iii)  $(1, -1, 1)$

(iv)  $(1, 1, 0), (-1, -1, 0)$

## Κεφάλαιο 7

**1** 8

**2**  $\frac{1}{3\pi}$

**3**  $\frac{\pi}{4} - \ln 2$

**4**  $27\pi$

**5**  $\frac{\pi}{2}$

**6** (i)  $\frac{1}{8}(1 - e^{-16})$ , (ii)  $\sin 1$

**7** (i)  $\frac{\pi}{4} \sin 1$ , (ii)  $\frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}})$ , (iii)  $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5} - 1)$

**8** (i)  $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ , (ii)  $2 - \frac{\pi}{4}$

**9**  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$