ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(ΜΑΣ 131)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 16 Νοεμβρίου, 2019

---

1. Να βρεθούν τα σημεία τομής των καμπυλών $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις δύο καμπύλες γύρω από

(i) τον άξονα των x,
(ii) την ευθεία $y = 1$,
(iii) τον άξονα των y,
(iv) την ευθεία $x = 1$,
(v) την ευθεία $y = -1$.

2. Έστω η καμπύλη $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$ το οποίο είναι και τοπικό ακρότατο, έχει γραμμικές ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2,\ x = 4$ και $y = 3$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών $a,\ b,\ c,\ p$ και q.

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

3. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$. Στην συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, γύρω από τον άξονα των x.

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x(x - 1)\mathrm{e}^{-x}$, τον άξονα των y και τον θετικόν άξονα των x.

4. (α) Να υπολογιστούν οι διαστάσεις ορθογωνίου με μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να εγγραφεί εντός ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά L, όπου η μια πλευρά του ορθογωνίου βρίσκεται επί της βάσης του τριγώνου.

(β) Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)}\ \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 4}} \qquad \text{(ii)}\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 5}.$$

5. (α) Να βρεθεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + (a+2)x + 2a}$$

για όλες τις τιμές της θετικής σταθεράς a.

(β) Να δειχθεί ότι

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - \cos 2\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \sin 2\theta$, ή διαφορετικά, να υπολογιστεί το

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}.$$