ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(ΜΑΣ 131)

Ενδιάμεση εξέταση
Τετάρτη 4 Νοεμβρίου, 2020

---

1. (α) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ είναι (i) συνεχής και (ii) παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$.

(β) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{(x-2)}}$.

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$.

3. (α) Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Αν $0 < x < y$, να δειχθεί ότι $\sqrt{xy} < \dfrac{1}{2}(x+y)$.

(β) Να δειχθεί ότι $1 + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x \geq 0$.

4. Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της καθέτου της καμπύλης $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ στα σημεία όπου $x = a$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $y = \mathrm{e}^{a\sin^{-1}x}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

(i) Να δειχθεί ότι

$$f(x)y'' - xy' - a^2y = 0,$$

όπου $f(x)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

(ii) Να δειχθεί ότι

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + g(n)y^{(n)} = 0,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $g(n)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

6. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη τριγωνομετρική αντικατάσταση να δειχθεί ότι
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$, όπου $a \neq 0$.

Έστω $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

(i) Να βρεθεί το I.

(ii) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \tan\dfrac{x}{2}$, να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$.

7. (α) Να δειχθεί ότι $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a,\ a > 0$. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 3^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^2+4}{(x-2)(x^2+4)}\mathrm{d}x.$$

8. Τα σημεία $A(1,4)$ και $B(3,0)$ βρίσκονται πάνω στην έλλειψη $2x^2+y^2=18$. Να βρεθεί σημείο C πάνω στην έλλειψη τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABC να έχει (i) μέγιστο και (ii) ελάχιστο εμβαδόν.

[**Υπόδειξη**: Η απόσταση του σημείου (x_0, y_0) από την ευθεία $ax+by+c=0$, δίνεται από τον τύπο $d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.]