

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



## ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

### ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(ΜΑΣ 131)

### Ενδιάμεση εξέταση

Σάββατο 5 Οκτωβρίου, 2019

1. Να δειχθεί ότι

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{όπου } |x| < 1.$$

Δίνεται ότι  $5 \cosh x - 3 \sinh x = R \cosh(x - a)$ , όπου  $R > 0$ . Να βρεθούν οι τιμές του  $R$  και του  $a$ .  
Να λυθεί η εξίσωση  $5 \cosh x - 3 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 2)$ .

2. (α) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ .

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής να δειχθεί ότι

$$2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}.$$

3. Αν  $y = x^n \ln x$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ , να δειχθεί ότι

$$x^2 y'' + a_n x y' + b_n y = 0,$$

όπου  $a_n$  και  $b_n$  είναι σταθερές προς υπολογισμό.

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$x^2 y^{(m+2)} + h(n, m) x y^{(m+1)} + g(n, m) y^{(m)} = 0,$$

όπου  $m \in \mathbb{N}$  και  $h(n, m)$ ,  $g(n, m)$  είναι συναρτήσεις προς υπολογισμό.

4. (α) Χωρίς τη χρήση του κανόνα L' Hospital, να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7} - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1}.$$

(β) Αν  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  είναι σταθερές τέτοιες ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + \sin bx + \sin cx + \sin dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8,$$

να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος  $a + b + c + d$ .

5. (α) Η κλίση μιας καμπύλης σ' ένα οποιοδήποτε σημείο  $(x, y)$  δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4.$$

Να εξεταστεί η καμπύλη ως προς τη μονοτονία και να προσδιοριστούν τί είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η κλίση της καμπύλης.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{12} x^2.$$