

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(ΜΑΣ 131)

Τελική εξέταση

Πέμπτη 10 Δεκεμβρίου, 2020

1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων συναρτήσει της εκθετικής συνάρτησης, να δεχθεί ότι

(i) $-1 < \tanh x < 1$,

(ii) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$,

(iii) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$3\operatorname{sech}^2 x + 7 \tanh x = 5$$

δείχνοντας ότι έχει μόνο μια λύση η οποία να δοθεί στη μορφή $b \ln a$.

2. (α) Να βρεθούν δύο θετικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $x + y = 60$ και xy^3 είναι μέγιστο.

(β) Έστω ότι p και q είναι τα μήκη των αποστάσεων του $(0, 0)$ από την εφαπτομένη και την κάθετη, αντίστοιχα, σ' ένα σημείο της καμπύλης $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Να δειχθεί ότι

$$4p^2 + q^2 = a^2.$$

[Υπόδειξη: Η απόσταση του σημείου (x_0, y_0) από την ευθεία $ax + by + c = 0$, δίνεται από τον τύπο

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.]$$

3. (α) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = y^2$ και $x = 4$ γύρω από

(i) τον άξονα των x ,

(ii) τον άξονα των y ,

(iii) την ευθεία $y = 2$,

(iv) την ευθεία $x = 4$,

(v) την ευθεία $x = -1$.

(β) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = \frac{5}{48} \left(1 + 4x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$ στο διάστημα $[1, 32]$.

4. (α) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (ii) \int \frac{1}{1+\sin x} dx.$$

(β) Χρησιμοποιώντας ότι $\sqrt{1+t^3} \geq t^{\frac{3}{2}}$, για $t \geq 0$, να δειχθεί ότι:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^3} dt = +\infty.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{2x} \sqrt{1+t^3} dt}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

5. (α) Να λυθεί η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = y^{-2}$, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3, \quad y(0) = 1$$

6. (α) (i) Αν $z = \cos \theta + i \sin \theta$, να δειχθεί ότι $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$.

(ii) Να εκφραστεί η παράσταση $(z^2 + z^{-2})^3$ συναρτήσει των $\cos 2\theta$ και $\cos 6\theta$.

(iii) Να δειχθεί ότι $\cos^3 2\theta = a \cos 6\theta + b \cos 2\theta$, όπου a και b σταθερές.

(iv) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 2\theta d\theta$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $z^4 = 4 - 4i$.