ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(ΜΑΣ 131)

Τελική εξέταση
Κυριακή 8 Δεκεμβρίου, 2019

---

1. Η καμπύλη $y = \dfrac{ax^2}{x-b}$, όπου a και b είναι σταθερές, έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 2$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 2$.

(α) Να δειχθεί ότι $b = 1$ και να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a.

(β) (i) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.

(ii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης.

(iii) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης.

(iv) Να εξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.

(v) Χρησιμοποιώντας τα ερωτήματα (i) - (iv), να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

(γ) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα $[\frac{3}{2}, 3]$.

(δ) Χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα, να δειχθεί ότι

$$\int_{\frac{3}{2}}^{3} y\mathrm{d}x \geq 12.$$

2. (α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - x^2} - \sin^{-1}\sqrt{x}$. Να δειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $x \in [0, 1]$. Επίσης να δειχθεί ότι

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το μήκος του διαγράμματος της καμπύλης $y = f(x)$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c}$$

λαμβάνοντας υπόψη τις περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της πραγματικής σταθεράς c.

(γ) Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα της ευθείας $y = x + 1$, να γίνει το διάγραμμα της $y = \dfrac{1}{x+1}$. Να σχεδιαστεί το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \dfrac{1}{x+1}$, τους δύο άξονες και την ευθεία $x = 3$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου γύρω από την ευθεία $y = 2$.

3. (α) Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων, να δειχθεί ότι

$$\sinh(A+B) = \sinh A \cosh B + \sinh B \cosh A$$

και ότι

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \text{όπου } |x| < 1.$$

Δίνεται ότι $5\cosh x + 13\sinh x = R\sinh(x+a)$, όπου $R > 0$. Να βρεθούν οι τιμές του R και του a.
Χρησιμοποιώντας ότι $\dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$, να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5\cosh x + 13\sinh x} = k \ln\left(\frac{15\mathrm{e}-10}{3\mathrm{e}+2}\right),$$

όπου k είναι σταθερά που πρέπει να υπολογιστεί.

(β) Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

4. (α) Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό της μορφής $x = u + x_0$ και $y = v + y_0$, όπου x_0 και y_0 σταθερές που πρέπει να υπολογιστούν, να μετατραπεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x + y + 1)y' + 5x + 2y + 1 = 0$$

σε ομογενή. Στη συνέχει να λυθεί η ομογενής χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $v = uw$ και να δοθεί η λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \ln y$, να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' - 4x^2 y + 2y \ln y = 0.$$

5. (α) Να λυθεί η εξίσωση $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

(β) Εκφράζοντας το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ σε δύο διαφορετικές μορφές, να υπολογιστεί το $\sin\frac{\pi}{12}$ και το $\cos\frac{\pi}{12}$.

(γ) Να περιγραφούν γεωμετρικά τα σύνολα των σημείων:
(i) $\{z : \ |z| = \mathrm{Im}\ z + \frac{1}{2}\}$
(ii) $\{z : \ |2iz - 1| = 4\}$

(δ) Να λυθεί η εξίσωση $z^7 + 1 = 0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.$$