ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 7

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{(i) } (4+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) \qquad \text{(ii) } \frac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})^2}$$

$$\text{(iii) } (2\mathrm{i}-1)^2\left(\frac{4}{1-\mathrm{i}}+\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) \qquad \text{(iv) } 3\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2-2\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3.$$

2. Αν $z_1=1-\mathrm{i},\ z_2=-2+4\mathrm{i},\ z_3=\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, να υπολογιστούν:

$$\text{(i) } \overline{(z_2+z_3)(z_1-z_3)} \qquad \text{(ii) } |z_1^2+\overline{z}_2^2|^2+|\overline{z}_3^2-z_2^2|^2$$

$$\text{(iii) } \mathrm{Re}\{2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2\} \qquad \text{(iv) } \mathrm{Im}\left\{\frac{z_1z_2}{z_3}\right\}.$$

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε:

$$2x-3\mathrm{i}y+4\mathrm{i}x-2y-5-10\mathrm{i}=(x+y+2)-(y-x+3)\mathrm{i}.$$

4. Να εκφραστούν σε πολική μορφή:

$$\text{(i) } 2+\mathrm{i} \qquad \text{(ii) } -3-4\mathrm{i} \qquad \text{(iii) } 1-2\mathrm{i}.$$

5. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{\left(\cos\frac{1}{7}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{1}{7}\pi\right)^3}{\left(\cos\frac{1}{7}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{7}\pi\right)^4}.$$

6. Να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του:

$$\frac{\left[\sqrt{3}\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\right]^4}{\cos2\theta-\mathrm{i}\sin2\theta}.$$

7. Αν $z=\frac{1}{2}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$, να εκφραστούν οι μιγαδικοί αριθμοί z^4 και z^5 στη μορφή:

$$a+\mathrm{i}b.$$

8. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των:

$$\text{(i) } 2\mathrm{i} \qquad \text{(ii) } 1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

9. Να υπολογιστούν:

$$\text{(i) } (-16)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{(ii) } \left(-8-\mathrm{i}8\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

10. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = re^{i\theta}$ και $w = Re^{i\phi}$, όπου $0 \leq r < R$, να δειχθεί ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}.$$

11. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{3}+i\right)^n + \left(\sqrt{3}-i\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι πραγματικός. Να βρεθεί η τιμή του όταν $n = 12$.

12. Αφού βρεθεί η έβδομη ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = -1$, να δειχθεί ότι:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

13. (i) Αν $|z| = 2$, τότε να δειχθεί ότι $|z + 6 + 8i| \leq 12$.

    (ii) Αν $|z| = 1$, τότε να δειχθεί ότι $2 \leq |z^2 - 3| \leq 4$.

14. Αν $|z| \leq 1$, να βρεθεί ένα άνω φράγμα της παράστασης $|3z^2 + 2z + 1|$.

15. Να δειχθεί ότι $\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta$.

16. Να δειχθεί ότι $\cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$.

17. Να λυθεί η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$.

18. Να βρεθεί η καμπύλη που αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση $|z+1| = |z-i|$.

19. Αν $z = \cos\theta + i\sin\theta$, αναπτύσσοντας τη $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^5 \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^5$, να δειχθεί ότι:

$$\sin^5\theta\cos^5\theta = \frac{1}{2^9}(\sin 10\theta - 5\sin 6\theta + 10\sin 2\theta).$$

    Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^5\theta d\theta.$$

20. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

    (i) $1 + \cos\phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + \cdots + \cos n\phi$

    (ii) $\sin\phi + \sin 2\phi + \sin 3\phi + \cdots + \sin n\phi$.

21. Να επιλυθούν οι εξισώσεις (Οι λύσεις να δοθούν στη μορφή $a + bi$):

    (i) $z^2 + (1+2i)z + 1 - 5i = 0$

    (ii) $z^2 + (1-7i)z - 16 - 11i = 0$

    (iii) $z^2 - (5-2i)z + 7 - 11i = 0$

(iv) $z^2 + (1+3i)z - 4 + 3i = 0$

(v) $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$

(vi) $z^6 + 64 = 0$

(vii) $z^4 + 16z^2 + 100 = 0$

(viii) $z^8 + z^4 + 1 = 0$

(ix) $z^{10} - z^8 + z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$

22. Να γραφούν οι μιγαδικοί αριθμοί

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{20}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{99}$ (ii) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{6n} + \left(\sqrt{3}-i\right)^{6n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=60}^{83}\left(\sqrt{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-i}{i\sqrt{3}-1}\right)^k$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{167}\left(-\sqrt{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^k$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{200} i^k - \sum_{k=0}^{201}(-1)^k i^k + \sum_{k=0}^{100} i^{-k}$

σε καρτεσιανή μορφή.

23. Αν $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι

$$|2z_1 - z_2 - z_3|^2 + |2z_2 - z_3 - z_1|^2 + |2z_3 - z_1 - z_2|^2$$
$$= c\left\{|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2\right\},$$

όπου c είναι σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί.

24. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε:

$$4z\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + 1 = 0, \quad b \in \mathbb{C},\ |b| > 2.$$