

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 6

1. Να δειχθεί ότι η τρι-παραμετρική οικογένεια των κύκλων

$$x^2 + y^2 + 2c_1x + 2c_2y + c_3 = 0,$$

είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 = 0.$$

2. Να κατασκευαστεί διαφορική εξίσωση η οποία ικανοποιείται από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

$$(i) y = c_1x^2 + c_2x^3 \quad (ii) cy^2 + x^2y^3 = 0.$$

3. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(i) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (ii) \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} + x(1+y) = 0$$

$$(iii) \frac{dy}{dx} = 1 - y + x^2 - yx^2 \quad (iv) \cos^2 x \frac{dy}{dx} - \sin x e^{-y} = 0.$$

4. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(i) \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \quad (ii) x \frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x > 0$$

$$(iii) \frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x - y} \quad (iv) xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - 2x^3.$$

5. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(i) \frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x} \quad (ii) \frac{dy}{dx} + y = \cos(e^x)$$

$$(iii) \cosh x \frac{dy}{dx} + \sinh xy = \cosh^2 x \quad (iv) x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x.$$

6. (i) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 2)$ και έχει κλίση ίση με xe^y .

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$ και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = 2 \sin^2 x \cos x.$$

7. Να απλοποιηθεί η διαφορική εξίσωση του Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x),$$

με τη χρήση του μετασχηματισμού $u = y^{1-n}$.

8. Να λυθούν οι πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι σε μορφή Bernoulli:

$$(i) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = y^3 \quad (ii) \frac{dy}{dx} - 2xy = 2x\sqrt{y}.$$

9. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b έτσι ώστε η συνάρτηση $y = ae^{bx}$ να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati:

$$\frac{dy}{dx} + e^{-x}y^2 - y - e^x = 0.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί γενική της λύση.

10. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$2y \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

11. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$x \sec^2 y \frac{dy}{dx} + \tan y = x^2.$$

12. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i) \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad y(2) = 2$$

$$(ii) x(\ln x - \ln y) \frac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(1) = 1$$

Η λύση να δοθεί στη μορφή $x = f(y)$

$$(iii) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}, \quad y(2\pi) = 1$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} y(x)$.

$$(iv) x \frac{dy}{dx} - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0, \quad y(1) = 0$$

$$(v) \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(1) = \frac{1}{3}$$

$$(vi) \frac{dy}{dx} = \frac{(1+y)^2}{x(1+y) - x^2}, \quad y(2) = 0$$

Η λύση να δοθεί στη μορφή $x = f(y)$

$$(vii) (1+x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 3x^3 + 3x, \quad y(0) = 1$$

$$(viii) \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$$

$$(ix) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1-2x}{x^2} \right) y - 1 = 0, \quad y(1) = 2$$

$$(x) \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x+y)^2}, \quad y(a) = 0, \quad a > 0$$

$$(xi) (x-x^3) \frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad a \neq 0, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

$$(xii) x \frac{dy}{dx} = y(y \ln x - 2), \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

$$(xiii) x(y' - y) = (1+x^2)e^x, \quad y(1) = 0$$

$$(xiv) 1 + e^{x/y} + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) y' = 0, \quad y(1) = 2$$

$$(xv) x(1+x^2)y' = y + yx^2 - x^2, \quad y(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$(xvi) y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}, \quad y(\sqrt{2}) = \frac{1}{9}$$

$$(xvii) y' - \frac{y}{1-x^2} = 1+x, \quad y(0) = 1$$

$$(xviii) 2yy' - \frac{x^2+y^2}{x} = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} - 2x, \quad y(1) = 1$$

Η λύση να δοθεί στη μορφή $\ln x = f(x, y)$

$$(xix) \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+y+1}, \quad y(1) = 0$$

$$(xx) \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}, \quad y(1) = 0$$

$$(xxi) y - xy' = b(1+x^2y'), \quad y(1) = 1, \quad b > 0$$

$$(xxii) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}, \quad y(0) = 3$$

$$(xxiii) \frac{dy}{dx} = y - y^2 \cos x, \quad y(0) = 2$$