

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 5

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

$$(i) y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = 4 \quad (ii) y = x^2 + 4, x + y = 6$$

$$(iii) y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = 2\pi \quad (iv) y = 2 + |x - 1|, y = -\frac{1}{5}x + 7$$

$$(v) y = 2 - x^2, y = -x \quad (vi) y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2.$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς k , έτσι ώστε η ευθεία $x = k$, να χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x = \sqrt{y}$, $x = 2$ και $y = 0$, σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

3. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

είναι ίσο με πab .

4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου, που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες, γύρω από τον άξονα των x :

$$(i) y = \sqrt{\cos x}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0 \quad (ii) y = x^2, y = 4x$$

$$(iii) y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4} \quad (iv) y = \sqrt{x}, y = x$$

$$(v) y = x^2 - 2x, y = 0 \quad (vi) y = -3x - x^2, y = 0$$

$$(vii) y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2 \quad (viii) y = \operatorname{sech} x, y = 0, x = 0, x = \ln 2$$

$$(ix) y = \cosh 2x, y = \sinh 2x, x = 0, x = 5.$$

5. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου, που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες, γύρω από τον άξονα των y :

$$(i) y = 2x - x^2, y = 0 \quad (ii) x = y^2, y = x^2$$

$$(iii) y = x^2 + 1, y = x + 3, x = 0 \quad (iv) y = x^4, x = 1, y = 0$$

$$(v) x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8 \quad (vi) y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

6. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = 4$:

(i) γύρω από τον άξονα των x

(ii) γύρω από την ευθεία $y = 4$

(iii) γύρω από τον άξονα των y

(iv) γύρω από την ευθεία $y = -1$

(v) γύρω από την ευθεία $x = 2$.

7. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου, που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{x^3}$, $x = 1$, $x = 2$ και $y = 0$, γύρω από την ευθεία $x = -1$.

8. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή του χωρίου, που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$, $y = 1$ και $x = 0$, γύρω από την ευθεία $y = 1$.

9. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου των καμπυλών:

(i) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$, από $x = 0$ ως $x = 3$

(ii) $9x^2 = 4y^3$, από $(0, 0)$ ως $(2\sqrt{3}, 3)$

(iii) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, από $x = 1$ ως $x = 3$

(iv) $(y + 1)^2 = 4x^3$, από $x = 0$ ως $x = 1$

(v) $y = 2 \sec x$, από $x = 0$ ως $x = \frac{\pi}{4}$

(vi) $y = \ln(1 - x^2)$, από $x = \frac{1}{4}$ ως $x = \frac{3}{4}$

(vii) $27y^2 = 4(x - 2)^3$, από $(2, 0)$ ως $(11, 6\sqrt{3})$

(viii) $6xy = x^4 + 3$, από $x = 1$ ως $x = 2$

(ix) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$, από $x = 1$ ως $x = e$

(x) $x = \ln \sqrt{1 + t^2}$, $y = \tan^{-1} t$, από $t = 0$ ως $t = 1$

(xi) $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1$, $y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta$, από $\theta = 0$ ως $\theta = 2\pi$.

10. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, γύρω από τον άξονα των x , των τόξων των καμπυλών:

(i) $y = \sqrt{x}$, από $x = 1$ ως $x = 4$

(ii) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, από $x = 1$ ως $x = 2$

(iii) $y = x^3$, από $x = 0$ ως $x = 1$

(iv) $y = \sqrt{2x - x^2}$, από $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ως $(1, 1)$

(v) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, από $t = 0$ ως $t = \frac{\pi}{2}$.

11. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, των τόξων των καμπυλών:

(i) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, από $x = 1$ ως $x = 3$, γύρω από την ευθεία $y = -1$.

(ii) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, από $(0, 0)$ ως $\left(9, \frac{33}{2}\right)$, γύρω από την ευθεία $x = 9$.

12. Η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $y = 2x$ τέμνονται στα σημεία O και A . Να υπολογιστεί η περίμετρος του μικτογράμμου χωρίου, που ορίζεται από τη χορδή OA και το τόξο OA . Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας, που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο, όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των x .

13. Να υπολογιστεί ο όγκος $V(b)$ του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των y του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

$$y = \frac{1}{1+x^4}, y = 0, x = 1 \text{ και } x = b \ (b > 1).$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} V(b).$$

14. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, γύρω από τον άξονα των x , του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = \frac{2}{\cos 2x - \sin 2x},$$

τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{12}$. (Δεν χρειάζεται να γίνει σχήμα.)

15. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή, του χωρίου που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες, γύρω από τον άξονα των x :

(i) $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$ (ii) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$.

16. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta,$$

γύρω από τον άξονα των x .

17. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε καμπύλη με εξίσωση:

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}.$$

Να υπολογιστεί η απόσταση που θα καλύψει από $t = 0$ ως $t = 4$.

18. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
19. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη:

$$y = x^{-1/3}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα των x .

20. Να υπολογιστεί το μήκος του διαγράμματος της $f(x) = \sqrt{x-x^2} - \sin^{-1} \sqrt{x}$.
21. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των πιο κάτω καμπυλών και των ασύμπτωτων τους.

$$(i) y = \frac{8}{x^2 + 4} \quad (ii) y = \frac{x}{(4 + x^2)^2} \quad (iii) y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

22. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x(x-1)e^{-x}$, τον άξονα των y και τον θετικό άξονα των x .
23. (i) Χρησιμοποιώντας τον τύπο υπολογισμού όγκου στερεού εκ περιστροφής, να υπολογιστεί ο όγκος κώνου ακτίνας r και ύψους h .
- (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου ακτίνας r και ύψους h .
- (iii) Να υπολογιστεί το ύψος κώνου, με ελάχιστο όγκο, που περιγράφεται γύρω από ημισφαίριο ακτίνας R . Η βάση του κώνου βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την βάση του ημισφαιρίου.

24. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$.

- (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, γύρω από τον άξονα των x .

25. Δίνεται η συνάρτηση $y = \sqrt{2xe^{1-2x}}$.

- (i) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα, τυχόν ασύμπτωτες και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (ii) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{2xe^{1-2x}}$, γύρω από την ασύμπτωτη της.

26. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2e^{-x^2}$.

- (i) Να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x , δοθέντος ότι $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

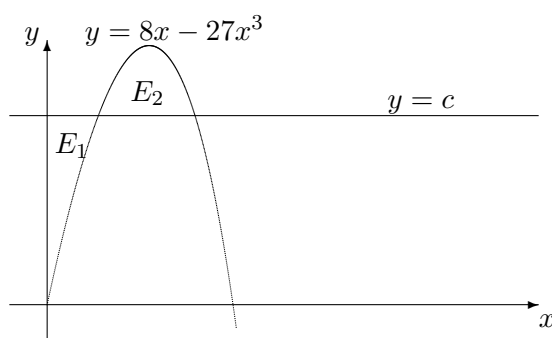
27. Δίνεται η συνάρτηση $y = \tan x$.

(i) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή, γύρω από τον άξονα των x , του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και την ευθεία $x = \frac{\pi}{4}$.

(ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης, από $x = 0$ μέχρι $x = \frac{\pi}{4}$, γύρω από τον άξονα των x .

28. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ υποδιαιρείται σε δύο χωρία από την παραβολή $y = \frac{x^2}{2}$. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των δύο χωρίων.

29. Η ευθεία $y = c$, $c > 0$ τέμνει την καμπύλη $y = 8x - 27x^3$ όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα. Να υπολογιστεί η τιμή του c έτσι ώστε το εμβαδόν E_1 να ισούται με το εμβαδόν E_2 .



30. Κυκλικός δίσκος με κέντρο $(1, 0)$ και ακτίνα 1 περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των y .

(i) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται.

(ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

31. Τόρος παράγεται εκ περιστροφής κυκλικού δίσκου ακτίνας $2cm$ γύρω από άξονα που βρίσκεται σε απόσταση $4cm$ από το κέντρο του δίσκου.

(i) Να υπολογιστεί ο όγκος του τόρου.

(ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τόρου.

32. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου της καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, από $x = 0$ ως $x = a$, γύρω από τον άξονα των x .

33. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sin x$ γύρω από τον άξονα των x , από το $x = 0$ ως το $x = \pi$.

34. Θεωρούμε το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = x - 1$ και την ευθεία $x = 5$.

- (i) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από την ευθεία $x = 5$.
- (ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των x .
35. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τόξου του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$, που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, γύρω από την χορδή που αντιστοιχεί στο τόξο αυτό.
36. Θεωρούμε τις ελλείψεις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$, με $a > b > d > c > 0$. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των δύο ελλείψεων περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $x = R$, όπου $R > a$. Να υπολογιστεί ο όγκος του παραγόμενου στερεού.