ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 4

1. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \sqrt{x}\left(x^2+4x^3\right)\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int_{-2}^{2} |2x-5|\mathrm{d}x.$$

2. Να βρεθεί συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f'(x) = 6 - 5\sin 2x$ και $f(0) = 3$.

3. Αν $f'(x) = \sqrt{x}$ και $f(1) = 5$, να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

4. Να υπολογιστούν **γεωμετρικώς** τα εμβαδά που ορίζονται από τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^5 4\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int_0^5 |x-1|\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int_{-3}^{0} \left(2+\sqrt{9-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int_0^{10} \sqrt{10x-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int_0^2 \sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\mathrm{d}x$$

$$\text{(vii)} \int_0^{15} f(x)\mathrm{d}x, \ \text{όπου} \ f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & x \le 3 \\ 4, & 3 < x < 12 \\ -\frac{4}{3}x+20, & x \ge 12. \end{cases}$$

5. Δεδομένου ότι $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} < x^{-\frac{3}{2}}$ για $4 \le x \le 9$ να δειχθεί ότι:

$$\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{3}.$$

6. Να δειχθεί ότι:

$$\int_0^1 x^2 \sin x \mathrm{d}x \le \frac{1}{3}.$$

7. Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα ορισμένα ολοκληρώματα να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{(i)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$

$$\text{(ii)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1^4+2^4+...+(n-1)^4+n^4}{n^5}.$$

8. Να υπολογιστεί η τιμή του $x$:

$$\text{(i)} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 3 \quad \text{(ii)} \int_x^0 \frac{1}{(3t+1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{6} \quad \text{(iii)} \int_2^x (4t-1)\mathrm{d}t = 9.$$

9. Να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x)$ στο διάστημα που δίνεται και να βρεθούν όλες οι τιμές του $x^*$ που ικανοποιούν το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα:

$$\text{(i) } f(x) = 2 + |x|, \quad [-3, 1] \qquad \text{(ii) } f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$$

$$\text{(iii) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, \quad [0, 4].$$

10. Να χρησιμοποιηθεί το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και ο κανόνας αλυσίδας για να δειχθεί ότι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f\left(g(x)\right) g'(x).$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f\left(g(x)\right) g'(x) - f\left(h(x)\right) h'(x).$$

11. Να βρεθούν οι πιο κάτω παράγωγοι:

$$\text{(i) } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\mathrm{d}t\right] \qquad \text{(ii) } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right]$$

$$\text{(iii) } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{-1}^{x^2+\sqrt{x}} \left(t+\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t\right]$$

12. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

13. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει $x^2 \leq f(x) \leq 6, \quad \forall x \in [-1, 2]$, να υπολογιστούν οι τιμές των σταθερών Α και Β τέτοιες ώστε:

$$A \leq \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x \leq B.$$

14. Αν $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$, να υπολογιστούν: (i) $F(1)$ και (ii) $F'(1)$. Επίσης να δειχθεί ότι:

$$F(4) - F(2) \leq \frac{2}{5}.$$

15. Να δειχθεί ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα στο $[a, b]$, τότε ισχύει

$$\int_a^b \left[f(x) - \bar{f}\right] \mathrm{d}x = 0,$$

όπου $\bar{f}$ είναι η μέση τιμή της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

16. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) \mathrm{d}t,$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

17. Να υπολογιστεί η τιμή $f(4)$ αν:

$$\text{(i)} \int_0^x f(t) = \cos \pi x \quad \text{(ii)} \int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x \cos \pi x \quad \text{(iii)} \int_0^{f(x)} t^2 \mathrm{d}t = x \cos \pi x.$$

18. Οι μεταβλητές $x$ και $y$ σχετίζονται με την εξίσωση:

$$x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = ky,$$

όπου $k$ σταθερά προς υπολογισμό.

19. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int x \tan^{-1} x \mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \mathrm{e}^{-3x} \sin 3x \mathrm{d}x \quad \text{(iv)} \int \cos(\ln x) \mathrm{d}x$$

$$\text{(v)} \int \sin^{-1} x \mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} \mathrm{d}x \quad \text{(vii)} \int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x \quad \text{(viii)} \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+6x+13}$$

20. Αν η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, να δειχθεί ότι:

$$\int_{-1}^1 x f''(x) \mathrm{d}x = f'(1) + f'(-1) + f(-1) - f(1).$$

21. Αν $m$, $n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $m \neq n$, να δειχθεί ότι:

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{(ii)} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \mathrm{d}x = 0$$

$$\text{(iii)} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) \mathrm{d}x = 0.$$

22. Δίνεται ότι $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$. Να δειχθεί ότι:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

23. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \sqrt{\cos x}\sin x \mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \tan^3 x \sec^5 x \mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int \mathrm{cosec}^4 x \mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{e}^x}{2 + 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int \frac{\tan^{-1}(x+2)}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x.$$

$$\text{(vii)} \int \sinh^3 x \cosh^2 x \mathrm{d}x \quad \text{(viii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 17}} \quad \text{(ix)} \int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 + 12x + 5}$$

$$\text{(x)} \int \frac{x+1}{x}\mathrm{d}x \quad \text{(xi)} \int \frac{x\mathrm{d}x}{2x+1} \quad \text{(xii)} \int \frac{\sec^3 x + \mathrm{e}^{\sin x}}{\sec x}\mathrm{d}x$$

24. Γράφοντας το άθροισμα $\sin x + \cos x$ στη μορφή $A\sin(x+\phi)$, να βρεθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}.$$

Με τον ίδιο τρόπο να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x},$$

όπου οι σταθερές $a$ και $b$ δεν μπορούν να είναι και οι δύο ίσες με μηδέν.

25. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+25}} \quad \text{(ii)} \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}}$$

$$\text{(iii)} \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x}\mathrm{d}x \quad \text{(iv)} \int_0^3 \frac{x^3\mathrm{d}x}{(3+x^2)^{5/2}}$$

26. Το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x,$$

μπορεί να βρεθεί είτε με τριγωνομετρική αντικατάσταση, είτε με την αντικατάσταση $u = x^2+4$. Να βρεθεί με τους δύο αυτούς τρόπους και να δειχθεί ότι τα αποτελέσματα είναι ισοδύναμα.

27. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{16x^2+16x+5} \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}} \quad \text{(iii)} \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sin^2 x - 6\sin x + 2}$$

$$\text{(iv)} \int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x} \quad \text{(vi)} \int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x$$

$$\text{(vii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} \quad \text{(viii)} \int \frac{\sec^2 x \mathrm{d}x}{\tan^3 x - \tan^2 x}.$$

28. Να υπολογιστούν οι σταθερές $a$ και $b$ τέτοιες ώστε:

$$x^4+1 = (x^2+ax+1)(x^2+bx+1).$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

29. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} \quad \text{(iv)} \int \frac{\cos x}{2-\cos x}\mathrm{d}x.$$

30. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \dfrac{1}{u}$, να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{3-x^2}} \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{(iv)} \int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^4}\mathrm{d}x.$$

31. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}+x^{1/4}} \quad \text{(iv)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \tan x}.$$

32. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - u$, να δειχθεί ότι:

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

33. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

34. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^{5/2}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)\sqrt{x-1}}.$$

35. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\text{(i)} \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$$

36. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_1^2 (x-1)^2 \ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

37. Δίνεται ότι:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{ax}\cos^n x\mathrm{d}x.$$

Να δειχθεί ότι, για $n > 1$:

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}I_{n-2} - \frac{a}{n^2+a^2}.$$

38. Έστω το ολοκλήρωμα:

$$I_{2n-1} = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{x^2+1}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Χωρίς να γίνει ολοκλήρωση, να δειχθεί ότι:

$$I_{2n+1} + I_{2n-1} = \int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x.$$

Αφού υπολογισθεί το πιο πάνω ολοκλήρωμα, να βρεθεί αναδρομικός τύπος για το $I_{2n+1}$. Στη συνέχεια να υπολογισθεί το $I_5$.

39. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{6x+6}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int \frac{1}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x.$$

40. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} \qquad \text{(iii)} \int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\mathrm{d}x.$$

41. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2\sin x} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x} \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}.$$

42. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντικατάσταση να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int x^3(1-x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}.$$

43. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin\dfrac{x}{2}} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 3x} \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-9\ln^2 x}}$$

$$\text{(iv)} \int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+3}\mathrm{d}x \qquad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+x^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{(vi)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sec 2x}.$$

44. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}} \qquad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x}} \qquad \text{(v)} \int_{-3}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \text{(vi)} \int_0^{4} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^{2/3}}$$

$$\text{(vii)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad \text{(viii)} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{(ix)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+4)}$$

$$\text{(x)} \int_0^{1} \ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(xi)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{(xii)} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

$$\text{(xiii)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^5} \qquad \text{(xiv)} \int_0^{1} \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(xv)} \int_0^{4} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\text{(xvi)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\mathrm{d}x \qquad \text{(xvii)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} \qquad \text{(xviii)} \int_0^{1} x\ln x\mathrm{d}x$$

$$\text{(xix)} \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^2} \qquad \text{(xx)} \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} \qquad \text{(xxi)} \int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

45. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $a$, αν:

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = 5 \qquad \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = 1, \quad a>0.$$

46. Δίνεται ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{d}x, \quad a>0.$$

47. Χρησιμοποιώντας ότι $\sqrt{1+t^3} \geq t^{\frac{3}{2}}$, για $t \geq 0$, να δειχθεί ότι:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t = +\infty.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

48. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ αποκλίνει για όλες τις τιμές του $p$.

49. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

50. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}}$, $a$ σταθερά (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$, $\quad y = \dfrac{1}{x+1}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{16} \tan^{-1}\sqrt{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{5+4\cos x+3\sin x}$.

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, $\quad a, b > 0,\ a \neq b.$ (vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \left[\sin^{-1} x\right]^4 \mathrm{d}x$ (viii) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2+1}}$

(ix) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t-5\sin t+6}$ (x) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$, $\quad a > 0$

(xi) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\tan x} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} + \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\cot x} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}$

51. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

52. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}.$$

53. (i) Να δειχθεί ότι, για $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m+n)\int \cos^m x \cos nx \mathrm{d}x - m\int \cos^{m-1} x \cos(n-1)x \mathrm{d}x = \cos^m x \sin nx + c.$$

(ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \mathrm{d}x.$$

54. Έστω $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Να δειχθεί ότι $I_n = a_n I_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$ και να βρεθεί ο $a_n$.

(ii) Να δειχθεί ότι $I_n = b_n (n!)^2$ και να βρεθεί ο $b_n$.

55. Έστω $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^4} \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Να υπολογισθεί το $I_1$.

(ii) Να δειχθεί ότι $I_0 = I_2$.

(iii) Υπολογίζοντας την τιμή του $I_0 + I_2 - \sqrt{2} I_1$, να βρεθεί η τιμή του $I_2$.