

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 3

1. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω όρια :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} & \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x^2 + 3x} & \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5x - 9)}{x^3 - 8} \\
 \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} & \text{(v)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\ln(3x + 4)} & \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos 3x} \\
 \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + x) \ln(1 - x)}{(1 - e^x) \cos x} & \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right) & \\
 \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{-\frac{3}{x}} & \text{(x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \cos \left( \frac{2}{x} \right) \right]^{x^2} & \text{(xi)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} - 1)^{1/\ln x} \\
 \text{(xii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & \text{(xiii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1 + 2e^x)] & \\
 \text{(xiv)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \tan x}{\pi - 1 + \sec x} & \text{(xv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 3^x}{x} & \text{(xvi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} \\
 \text{(xvii)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} & \text{(xviii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) & \text{(xix)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x - 3} \right)^x \\
 \text{(xx)} \lim_{x \rightarrow 1} \csc \pi x \ln x & \text{(xxi)} \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin^{-1} x) \csc^3 x & \\
 \text{(xxii)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x - 1} \right) & \text{(xxiii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) & \\
 \text{(xxiv)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{(xxv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} & \text{(xxvi)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).
 \end{array}$$

2. Να υπολογιστούν οι τιμές των σταθερών  $a$  και  $b$  τέτοιες ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \cos bx}{x^2} = -4.$$

3. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = a,$$

τότε να υπολογιστεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x f \left( \frac{t}{\sqrt{x}} \right) \right], \quad t > 0.$$

4. Να δειχθεί ότι  $x < \tan x$ , όταν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

5. Η συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 2]$ . Επιπλέον ισχύει  $f(1) = 3$  και  $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in (0, 2)$ . Να αποδειχθεί ότι  $1 \leq f(x) \leq 5, \forall x \in (0, 2)$ .

6. Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι παραγωγίσιμες στο  $[0, 1]$  και δεν μηδενίζονται στο  $(0, 1)$ . Επιπλέον ισχύει  $f(0) = g(1) = 0$ . Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0,$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(0, 1)$ .

7. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$  εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα  $[-1, 2]$  και να βρεθεί  $c \in (-1, 2)$ , τέτοιο ώστε  $f'(c) = 0$ .

8. Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Rolle για να δειχθεί ότι η εξίσωση  $6x^5 - 4x + 1 = 0$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

9. Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα μέσης τιμής για να αποδειχθεί ότι :

(i)  $|\tan x + \tan y| \geq |x + y|, \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

(ii) Αν  $f(1) = 0$  και  $f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$  τότε  $f(x) \leq x - 1, \quad \forall x > 0.$

(iii) Αν  $0 < x < y$ , τότε  $1 - \frac{x}{y} < \ln \frac{x}{y} < \frac{y}{x} - 1.$

10. Αν  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει  $f'(x) = g(x)$  και  $g'(x) = -f(x) \quad \forall x$ , τότε να δειχθεί ότι η  $f^2(x) + g^2(x)$  είναι σταθερά συνάρτηση.

11. Να δειχθεί ότι για κάθε  $x$  ισχύει :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Έστω η συνάρτηση  $f$  η οποία έχει παράγωγο ίση με :

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Να δειχθεί ότι

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|,$$

για κάθε  $a$  και  $b$  με  $a \neq b$ .

12. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στη συνάρτηση  $f(t) = \tanh^{-1} t$  στο διάστημα  $[0, x]$ , όπου  $x < 1$ , να δειχθεί ότι :

$$x < \tanh^{-1} x < \frac{x}{1-x^2}.$$

13. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x},$$

με  $x \geq 0$  έχουν την ίδια παράγωγο και επομένως :

$$f(x) = g(x) + c.$$

Να βρεθεί η τιμή του  $c$ .

14. Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση. Να γίνει η γραφική παράσταση της  $f$  στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(i)  $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(ii)  $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0$  όταν  $x < 2$  και  $f''(x) > 0$  όταν  $x > 2$

(iii)  $f(2) = 4, f'' > 0$  όταν  $x \neq 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = +\infty$ .

15. Το σημείο  $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$  είναι τοπικό ακρότατο της  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + ax + b$ . Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $a$  και  $b$ .

16. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

(i)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$     (ii)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

(iii)  $f(x) = \sin x - x$ .

17. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

(i)  $y = \frac{(x-2)^3}{x^2}$     (ii)  $y = \frac{2(x+6)(x-4)}{(x-6)(x+4)}$     (iii)  $y = \frac{2x-x^2}{x^2-2x-3}$

(iv)  $f(x) = 1 - x^{2/3}$     (v)  $f(x) = x - \cos x$     (vi)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(vii)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$     (viii)  $f(x) = x\sqrt{1-x}$ .

18. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:

(i)  $f(x) = 2 \sec x - \tan x$     -     $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$     (ii)  $f(x) = |6 - 4x|$     -     $[-3, 3]$

(iii)  $f(x) = \sin(\cos x)$     -     $[0, 2\pi]$     (iv)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$     -     $(0, +\infty)$ .

19. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$

στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ .

20. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  δεν έχει σχετικά ακρότατα.

21. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση  $y = x^3 - 3px + q$  έχει σχετικά ακρότατα.

22. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση  $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$  έχει σχετικά ακρότατα.

23. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ . Να δειχθεί ότι η  $f(x)$  είναι πάντοτε μη αρνητική. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης  $y = f(x)$  και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα απόλυτα ακρότατα της  $f(x)$ .
24. Η καμπύλη με εξίσωση  $y = \frac{ax+b}{x^2-x-2}$ , όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές, έχει στάσιμο σημείο το  $(1, 1)$ . Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $a$  και  $b$  και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.
25. Να υπολογιστούν δύο μη-αρνητικοί αριθμοί που έχουν άθροισμα ίσο με 20 και είναι τέτοιοι ώστε:
- (i) το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι μέγιστο
  - (ii) το γινόμενο του τετραγώνου του ενός επί τον κύβο του άλλου είναι μέγιστο.
26. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη  $x^2 - y^2 = 1$  τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο  $(0, 2)$ .
27. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης  $2y^2 = 5(x+1)$  το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.
28. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου  $(4, 2)$  από την παραβολή  $y^2 = 8x$ .
29. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη  $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$  τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.
30. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη  $x^2 - y^2 = 1$  τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο  $(c, 0)$  στις περιπτώσεις: (i)  $c = 4$  (ii)  $c = 2$  (iii)  $c = \sqrt{2}$ .
31. Να δειχθεί ότι  $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ , όταν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
32. Να δειχθεί ότι για κάθε  $x \in (0, 1)$  ισχύει:
- $$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}.$$
33. Να βρεθεί το πολυώνυμο Maclaurin 4ου βαθμού ( $n = 4$ ) των συναρτήσεων:
- (i)  $\tan x$     (ii)  $xe^x$     (iii)  $\sec x$     (iv)  $\ln(3+2x)$ .
34. Να βρεθεί η σειρά Maclaurin των πιο κάτω συναρτήσεων. Να εκφραστεί η απάντηση στη μορφή  $\sum u_k$ .
- (i)  $\frac{1}{x+1}$     (ii)  $\ln(x+1)$     (iii)  $\cos \frac{x}{2}$     (iv)  $\cosh x$
35. Να βρεθεί η σειρά Taylor στο  $x = a$  των πιο κάτω συναρτήσεων. Να εκφραστεί η απάντηση στη μορφή  $\sum u_k$ .
- (i)  $\frac{1}{x}$ ,  $a = -1$     (ii)  $\ln x$ ,  $a = 1$     (iii)  $\sin \pi x$ ,  $a = \frac{1}{2}$     (iv)  $\sinh x$ ,  $a = \ln 4$

36. Να βρεθεί το υπόλοιπο σε μορφή Lagrange για τις πιο κάτω συναρτήσεις για τις τιμές των  $a$  και  $n$ , που δίνονται :

$$(i) xe^x, a = 0, n = 3 \quad (ii) \tan^{-1} x, a = 0, n = 2$$

$$(iii) \sin x, a = \frac{\pi}{6}, n = 4 \quad (iv) \frac{1}{(1+x)^2}, a = -2, n = 5.$$

37. Να αποδειχθεί ότι η σειρά Maclaurin της  $\cos x$  συγκλίνει στην  $\cos x$  για όλες τις τιμές του  $x$ .

38. Να αποδειχθεί ότι η σειρά Taylor της  $\sin x$  στο  $x = \frac{\pi}{4}$  συγκλίνει στην  $\sin x$  για όλες τις τιμές του  $x$ .

39. Με τη χρήση γνωστών σειρών Maclaurin να βρεθεί η σειρά Maclaurin των πιο κάτω συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση να δίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι και το διάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση.

$$(i) xe^{-x} \quad (ii) x^2 \cos x \quad (iii) \sin^2 x$$

$$(iv) \ln(1-x^2) \quad (v) \frac{x^2}{1+3x} \quad (vi) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

40. Με τη χρήση της σειράς Maclaurin της  $\frac{1}{1-x}$  να εκφραστεί η  $\frac{1}{x}$  σε δυνάμεις του  $(x-1)$ . Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης.

41. Με τη χρήση των σειρών Maclaurin των  $\sin x$  και  $e^x$ , να υπολογιστούν τα πιο κάτω αθροίσματα :

$$(i) \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots$$

$$(ii) 1 - \ln 3 + \frac{(\ln 3)^2}{2!} - \frac{(\ln 3)^3}{3!} + \dots$$

42. Να υπολογιστεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x+1}{x+2} \right) - \frac{\pi}{4} \right]$$

43. Σύρμα μήκους  $10m$  κόβεται σε δύο μέρη. Από το ένα μέρος κατασκευάζεται τετράγωνο και από το άλλο κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς του τετραγώνου έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι :

$$(i) \text{ελάχιστο} \quad (ii) \text{μέγιστο.}$$

44. Δίνεται σημείο  $A$  πάνω στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας  $R$ . Η χορδή  $BC$  του κύκλου είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$ . Να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου  $A$  από την χορδή  $BC$  έτσι ώστε το τρίγωνο  $ABC$  να έχει μέγιστον εμβαδόν.

45. Ορθός κυκλικός κύλινδρος εγγράφεται εντός σφαίρας ακτίνας  $r$ .
- (i) Να υπολογιστεί ο μέγιστος όγκος που μπορεί να έχει ο κύλινδρος.
  - (ii) Να υπολογιστεί το μέγιστο εμβαδόν ολικής επιφάνειας που μπορεί να έχει ο κύλινδρος.

46. Από ποιο σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο, της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

πρέπει να διέρχεται η εφαπτομένη έτσι ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τους θετικούς ημιάξονες να έχει ελάχιστον εμβαδόν.

47. Να υπολογιστεί το ύψος κώνου εγγεγραμμένου εντός σφαίρας ακτίνας  $R$ , έτσι ώστε η κυρτή του επιφάνεια να είναι μέγιστη.
48. Να υπολογιστεί το ύψος κώνου εγγεγραμμένου εντός σφαίρας ακτίνας  $R$ , έτσι ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.
49. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων της παραβολής  $y^2 = 4px$  των οποίων η απόσταση από το σημείο  $(a, 0)$ ,  $a > 0$  είναι ελάχιστη.
50. Να υπολογιστούν οι διαστάσεις ισοσκελούς τραπεζίου εμβαδού  $S$  και γωνίας βάσης  $\theta$ , το οποίο να έχει ελάχιστη περίμετρο.