

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 2

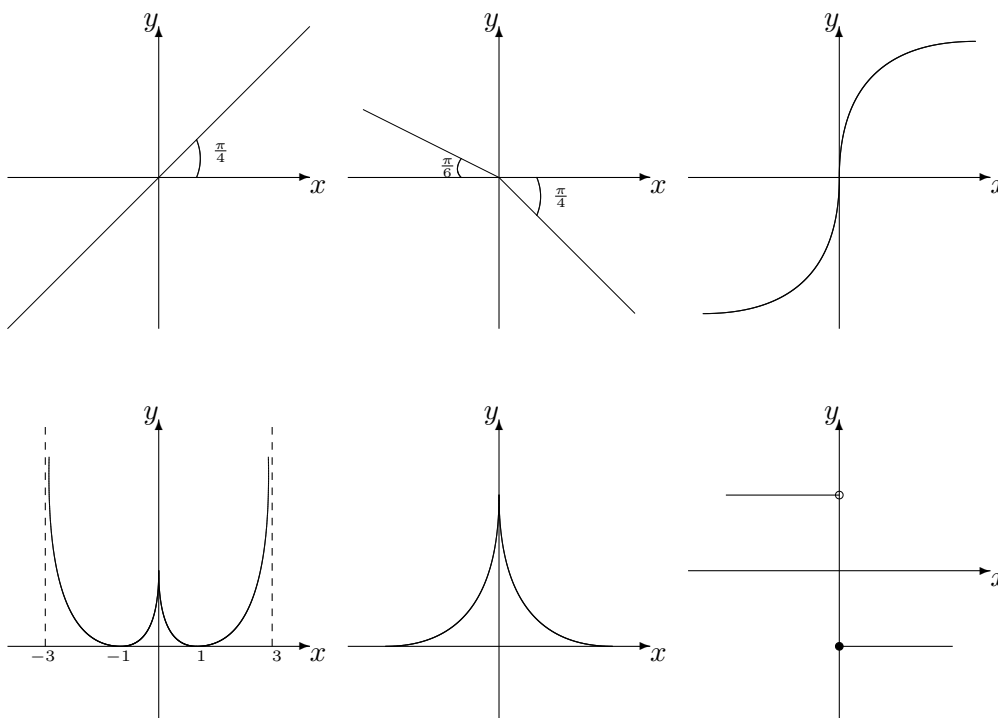
1. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της παραγώγου για να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (ii) f(x) = \sqrt{x+1} \quad (iii) f(x) = x^{1/3}$$

$$(iv) f(x) = \cos x \quad (v) f(x) = \tan x \quad (vi) f(x) = \sec x.$$

2. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b αν η εφαπτομένη της καμπύλης $y = ax^2 + bx$ στο σημείο $(1, 5)$, αυτής, έχει κλίση ίση με $\lambda = 8$.

3. Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων των συναρτήσεων των οποίων τα διαγράμματα δίνονται στα παρακάτω σχήματα:



4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2 \\ x+2 - \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f_1 , f_2 , $f_1 + f_2$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x = -2$.

5. (α) Αν $y = \frac{\sin x}{x}$ να δειχθεί ότι $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

(β) Αν $x^2 + y^2 = 2y$ να δειχθεί ότι $(1 - y)^3 y'' = 1$.

(γ) Αν $y = \sqrt{\sec 2x}$ να δειχθεί ότι $y'' - 3y^5 + y = 0$.

(δ) Αν $y = \sqrt{5x^2 + 3}$ να δειχθεί ότι $yy'' + (y')^2 = 5$.

6. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+3h)]^2 - [f(x+h)]^2}{h}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ k(x-1), & x > 1. \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η f είναι: (α) συνεχής και (β) παραγωγίσιμη.

8. Να δειχθεί ότι η παράγωγος μιας άρτιας παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι περιττή και αντίστροφα.

9. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

(α) $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = 1 + xg(x), \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$,

να αποδειχθεί ότι $f'(x) = f(x)$.

10. Έστω η καμπύλη η οποία περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 7, \quad y = t^2 + t + 1.$$

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου t για τις οποίες η καμπύλη έχει:

(α) οριζόντια και (β) κατακόρυφη εφαπτομένη.

11. Να δειχθεί ότι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t^2 - 3t + 5, \quad y = t^3 + t^2 - 10t + 9,$$

τέμνει τον εαυτό της στο σημείο $(3, 1)$. Σε αυτό το σημείο να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης.

12. Αν $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ να δειχθεί ότι:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

13. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \tan^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$ (ii) $f(x) = \tan^{-1} (xe^{2x})$

(iii) $f(x) = \sin^{-1} (x^2 \ln x)$ (iv) $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{\ln x}$

(v) $f(x) = 2x^2 \sqrt{2-x}$ (vi) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

(vii) $f(x) = (x^2+3)^4 (2x^3-5)^3$ (viii) $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1} \right)^4$.

14. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \quad (ii) f(x) = (x^2 + 2x)^3 + 4.$$

15. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (ii) f(x) = \frac{1}{3x + 2}.$$

16. Να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \sqrt{x - 5} \quad (ii) f(x) = x^2 + 2 \quad (iii) f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

17. Δίνονται οι πιο κάτω εξισώσεις. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος, y'' :

$$(i) x + xy + y = 2 \quad (ii) x^3 - 3xy + y^3 = 1.$$

18. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών

$$5y - 2x + y^3 - x^2y = 0 \text{ και } 2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0,$$

στην αρχή των αξόνων τέμνονται κάθετα.

19. Να δειχθεί ότι η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 45$ και η υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 5$ είναι ορθογώνιες.

20. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών $y = \ln(x - 2)$ και $y = x^2 - 4x + 3$ στο σημείο τομής $(3, 0)$ σχηματίζουν γωνία ίση με $\tan^{-1} \frac{1}{3}$.

21. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται παραμετρικά:

$$(i) x = 2 \sin t, y = \cos 2t \quad (ii) x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta.$$

22. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης των πιο κάτω καμπυλών, στο σημείο που δίνεται:

$$(i) x = 3e^t, y = 5e^{-t}, t = 0 \quad (ii) x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta, \theta = \frac{\pi}{4}.$$

23. Αν $f'(x) = \sin(x^2)$ και $y = f\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)$, να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$.

24. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$(i) y = (\tanh^{-1} x)^2 \quad (ii) y = \ln(\cosh^{-1} x) \quad (iii) y = \cosh^{-1}(\sinh^{-1} x).$$

25. Αν $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, να δειχθεί ότι $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$.

26. Έστω:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 1.$$

Να υπολογιστεί η y'' όταν $x = 1$.

27. Έστω:

$$e^y + xy = e.$$

Να υπολογιστεί η y'' όταν $x = 0$.

28. Αν

$$(a + bx)e^{y/x} = x, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

να δειχθεί ότι

$$\frac{(xy' - y)^2}{y''} = f(x),$$

όπου $f(x)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

29. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

στο σημείο της (a, b) .

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 - a^2)^2}$, όπου a είναι σταθερά.

(i) Να δειχθεί ότι για $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{f_1(x)}{(x - a)^{n+2}} + \frac{f_2(x)}{(x + a)^{n+2}},$$

όπου $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις που πρέπει να υπολογιστούν.

(ii) Να υπολογισθεί η $f^{(n)}(0)$ στην απλούστερη δυνατή μορφή.

31. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{6}{2x^3 - x^2 - 2x + 1}.$$

(i) Να βρεθεί η $f^{(n)}(x)$, για $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Να υπολογιστεί το $f^{(4)}(0)$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

(i) Να δειχθεί ότι $f^{(4)}(x) = g(x)e^{\frac{1}{x}}$ και να υπολογισθεί η συνάρτηση $g(x)$ στην απλούστερη δυνατή μορφή.

(ii) Να υπολογισθεί η $f^{(4)}(2)$ ως πολλαπλάσιο του \sqrt{e} .

33. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 \cos x$.

(i) Να βρεθεί στην πιο απλή της μορφή η :

$$f(x) = \frac{4xy' - x^2y''}{y}.$$

(ii) Να υπολογισθεί η συνάρτηση $g(n)$ τέτοια ώστε

$$g(n)y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

34. Αν

$$e^x + x = e^y + y$$

να δειχθεί ότι

$$y'' = \frac{(e^{x+y} - 1)g(x, y)}{(e^y + 1)^3}$$

όπου $g(x, y)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

35. Δίνεται η συνάρτηση :

$$y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να δειχθεί ότι η y ικανοποιεί τη σχέση

$$(1 + x^2)y'' + xy' + f(n)y = 0,$$

όπου $f(n)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

36. Αν $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι :

(i) $y'' = f(y)$ και να βρεθεί η $f(y)$

(ii) $y''' = xg(y)$ και να βρεθεί η $g(y)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση :

$$y = a_1e^{\sqrt{bx}} + a_2e^{-\sqrt{bx}} + a_3 \cos(\sqrt{bx}) + a_4 \sin(\sqrt{bx}), \quad b > 0.$$

Αν

$$y^{(4m)} + \delta y = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

να βρεθεί η σταθερά δ .

38. Αν

$$f(x) = (x^2 + 1) \sin(ax), \quad a \in \mathbb{R},$$

να υπολογιστεί η $f^{(2m)}$, $m \in \mathbb{N}$.

39. (i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ax} \cos bx$, $a, b \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η $f^{(n)}(x)$ μπορεί να εκφρασθεί στη μορφή:

$$f^{(n)}(x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \cos(bx + n\theta), \quad n \in \mathbb{N}$$

και να βρεθεί το θ συναρτήσει των a και b .

- (ii) Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x \cos x$. Να υπολογισθεί η $g^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^{-x} \sin x$ και $F(x) = f(x) + g(x)$.

- (i) Να δειχθεί ότι

$$f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin(x + a_n \pi), \quad n \in \mathbb{N}$$

και να βρεθεί η a_n .

- (ii) Να υπολογιστεί η $F^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

41. Δίνεται η συνάρτηση:

$$y = \sin^{-1} x.$$

- (i) Να δειχθεί ότι η y ικανοποιεί την σχέση

$$f(x)y'' = xy',$$

όπου $f(x)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

- (ii) Να βρεθεί η $y^{(n)}(0)$, για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

42. Δίνεται η συνάρτηση:

$$y = [\sin^{-1} x]^2.$$

- (i) Να δειχθεί ότι η y ικανοποιεί την σχέση

$$(1 - x^2) y'' = 2 + f(x)y',$$

όπου $f(x)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

- (ii) Να δειχθεί ότι, για $n \in \mathbb{N}$, η y ικανοποιεί την σχέση

$$(1 - x^2) y^{(n+1)} - (2n - 1)xy^{(n)} + g(n)y^{(n-1)} = 0,$$

όπου $g(n)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

43. Δίνεται η συνάρτηση:

$$y = \cos(m \cos^{-1} x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

- (i) Να δειχθεί ότι η y ικανοποιεί την σχέση

$$(1 - x^2) y'' - xy' + f(m)y = 0,$$

όπου $f(m)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.

- (ii) Να δειχθεί ότι, για $n \in \mathbb{N}$, η y ικανοποιεί την σχέση

$$(1 - x^2) y^{(n+2)} - (2n + 1)xy^{(n+1)} + g(n, m)y^{(n)} = 0,$$

όπου $g(n, m)$ είναι συνάρτηση που πρέπει να υπολογιστεί.