

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 1

1. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

2. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί:

(i) 0.123123123... (ii) 12.7777...

(iii) 38.07818181... (iv) 0.42960000....

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

(i) $\frac{4}{2-x} \leq 1$ (ii) $(x-4)(x+2) > 0$

(iii) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$ (iv) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$.

4. Να αποδειχθεί ότι:

(i) $|a-b| \leq |a| + |b|$ (ii) $|a| - |b| \leq |a-b|$ (iii) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(i) $|5x+4| = -1$ (ii) $|3x+2| = 5$ (iii) $|x-4|^2 - 4|x-4| = 12$

(iv) $\left| \frac{x-3}{x-4} \right| = 5$ (v) $|4x+5| = |8x-3|$.

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

(i) $\left| \frac{3-2x}{2+x} \right| \leq 4$ (ii) $\frac{1}{|x-4|} - \frac{1}{|x+7|} < 0$ (iii) $\left| \frac{2x-1}{x} \right| > 2$

(iv) $\left| \frac{x}{x+2} \right| \leq 2$ (v) $|3x-4| \geq |2x+1|$.

7. Να βρεθεί αριθμός M τέτοιος ώστε:

(i) $|x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leq M$, για όλες τις τιμές του x στο διάστημα $[-3, 2]$

(ii) $\left| \frac{x+2}{x} - 5 \right| < M$, όπου $x \in (1, 4)$.

8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (ii) $f(x) = x + \cos x$ (iii) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

(iv) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (v) $f(x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}$

(vi) $f(x) = |2x-4| - x$ (vii) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

9. Απαλείφοντας τις απόλυτες τιμές να οριστεί τμηματικά η συνάρτηση

$$f(x) = |x - 5| - |x - 3|$$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

10. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{|x - 3|^2 + |x - 3| - 6}$.

Να βρεθούν συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, τέτοιες, ώστε $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = f(x)$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x) = 5x + 4$ και $f_2(x) = 6x + c$, όπου c είναι σταθερά.

Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c , τέτοια, ώστε $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

12. Κάθε συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί ως $f(x) = g(x) + h(x)$, όπου:

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ και } h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Να δειχθεί ότι η $g(x)$ είναι άρτια συνάρτηση και η $h(x)$ είναι περιττή συνάρτηση.

Να εκφραστούν οι πιο κάτω συναρτήσεις σε άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης:

$$(i) f(x) = e^x \quad (ii) f(x) = e^x \sin x$$

$$(iii) f(x) = 10^x + 2x \quad (iv) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

13. Αν $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $f_2(x) = \sin 3x$, να υπολογιστούν:

$$(i) (f_1 + f_2)(x) \quad (ii) (f_1 - f_2)(x) \quad (iii) (f_1 f_2)(x)$$

$$(iv) \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \quad (v) (f_1 \circ f_2)(x) \quad (vi) (f_2 \circ f_1)(x).$$

Σε κάθε περίπτωση να δίνεται το πεδίο ορισμού.

14. Η συνάρτηση $[x]$, όπου $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του x . Για παράδειγμα, $[4.2] = 4$, $[-2.7] = -3$, $[5] = 5$.

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις:

$$(i) f(x) = [x] \quad (ii) f(x) = x - [x] \quad (iii) f(x) = [x] - x \quad (iv) f(x) = [\sin x].$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{px+q}{x+r}$, όπου p , q , r είναι σταθερές και $x \neq \pm r$. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση να αποδειχτεί ότι:

$$(i) q = rp$$

(ii) η f είναι της μορφής $f = \text{σταθερά}$.

16. (α) Αν $f(x+y) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $f(0) = 0$.

17. Να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ και το πεδίο ορισμού της όταν:

(i) $f(x) = (x + 2)^4, x \geq 0$

(ii) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

(iii) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2, x \geq 0$

(iv) $f(x) = x - 5x^2, x \geq 1.$

18. Αν $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, να βρεθεί η τιμή του x που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 2.$$

19. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x + c}$ να έχει ως αντίστροφή της τον εαυτό της.

20. Να βρεθεί το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $f(x) = 5 - x^2$

(iii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(iv) $f(x) = x - |x|.$

21. Να βρεθεί το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 2, & 3 < x < 4. \end{cases}$

22. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + |x - 1|.$

23. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2}.$$

24. Δίνεται ότι

$$\ln \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ln(x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x - 1) + 3x + \ln x + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Να εκφραστεί το y συναρτήσει του x .

25. Για τις πιο κάτω συναρτήσεις

(i) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

(ii) $f(x) = x^2$

(iii) $f(x) = 4 - x^2$

να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:

(α) $y = f(x)$

(β) $y = |f(x)|$

(γ) $y = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}|f(x)|.$

26. Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} \quad \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3} \quad \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} \\
 & \text{(v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \quad \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3} \quad \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) \\
 & \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x} \\
 & \text{(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(kx)}{x^2}, k \neq 0 \quad \text{(xi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(kx)}{x}, k \neq 0 \quad \text{(xii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\
 & \text{(xiii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), [t = 1/x] \quad \text{(xiv)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin x} \quad \text{(xv)} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} \\
 & \text{(xvi)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{(xvii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{1 + 3e^x} \quad \text{(xviii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-e^x)} \\
 & \text{(xix)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \quad \text{(xx)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad \text{(xxi)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \\
 & \text{(xxii)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x + \sin x} \quad \text{(xxiii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} \\
 & \text{(xxiv)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x^2 - x}.
 \end{aligned}$$

27. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι πιο κάτω συναρτήσεις :

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} f(x) = \begin{cases} 3+x, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases} \quad \text{(ii)} f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} \\
 & \text{(iii)} f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 \leq x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 4 \end{cases} \quad \text{(iv)} f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1. \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

28. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

29. Να προσδιοριστούν οι τιμές των σταθερών a και b , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

30. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ ax + b + \ln x, & 1 < x < 2 \\ \ln x, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

31. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ (2\lambda + 1) \tan x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

32. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{x} (x^2 - 1)$$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

33. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα sandwich για να αποδειχθεί ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0.$$

34. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σημεία ασυνέχειας και να εξεταστεί αν είναι διορθώσιμα.

$$(i) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad (ii) f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 17x + 15}{x^2 + 2x - 15}$$

35. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2}, & x \geq -\frac{2}{7}, x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

36. Να αποδειχθεί ότι :

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx.$$

37. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες της $\tanh x$:

(i) $-1 < \tanh x < 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1.$

38. Αν $u = \tanh^{-1} \left(-\frac{3}{5} \right)$, να βρεθούν: (i) $\cosh u$ (ii) $\sinh u$ (iii) $\cosh 2u$.

39. Αν $u = \operatorname{csch}^{-1} \left(-\frac{5}{12} \right)$, να βρεθούν: (i) $\coth u$ (ii) $\sinh u$ (iii) $\cosh u$ (iv) $\sinh 2u$.

40. Να λυθεί η εξίσωση :

$$\cosh^{-1} \left(\frac{5}{4} \right) + \cosh^{-1} \left(\frac{5}{3} \right) = \ln(x) - \ln(x - 1), \quad x > 1.$$

41. Να λυθεί η εξίσωση $12 \cosh^2 x - 25 \sinh x = 0$.

42. Δίνεται ότι $5 \cosh x - 3 \sinh x = R \cosh(x - \alpha)$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών α και R . Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση :

$$5 \cosh x - 3 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 2).$$

43. Να υπολογιστεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh ax}{e^x},$$

όπου a είναι θετική σταθερά.

44. (i) Να δειχθεί ότι για κάθε πραγματική τιμή του x ισχύει $\cosh x \geq 1$.

(ii) Να δειχθεί ότι για κάθε πραγματική τιμή του x ισχύει $0 < \operatorname{sech} x \leq 1$.

(iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \operatorname{sech} x$.

45. Να δειχθεί ότι:

$$\tanh^{-1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) + \operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left[1 + \sqrt{1 + x^2} \right], \quad x > 0.$$

46. Να λυθεί η εξίσωση :

$$\cosh(\ln x) = \sinh \left(\ln \frac{x}{4} \right) + \frac{19}{8}, \quad x > 0.$$

47. Να υπολογισθούν τα πιο κάτω όρια :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3} - \sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right)$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n + a^n) \sum_{j=1}^m \frac{j}{(x+j)^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sum_{l=1}^{100} (x+l)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} \right)$$

$$(ix) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(a+2h) - 2\tan(a+h) + \tan a}{h^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$