ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

1. Να δειχθεί ότι τα πιο κάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και να βρεθεί μια δυναμική συνάρτηση:

$$\text{(i) } \mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{(ii) } \mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j} \quad \text{(iii) } \mathbf{F} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$$

2. Να δειχθεί ότι τα πιο κάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και να βρεθεί μια δυναμική συνάρτηση:

$$\text{(i) } \mathbf{F} = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k} \quad \text{(ii) } \mathbf{F} = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$$

$$\text{(iii) } \mathbf{F} = \frac{z}{y}\mathbf{i} - \frac{xz}{y^2}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k} \quad \text{(iv) } \mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

3. Να βρεθεί η απόκλιση για τα πιο κάτω διανυσματικά πεδία:

$$\text{(i) } \mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j} \quad \text{(ii) } \mathbf{F} = x\mathrm{e}^x\mathbf{i} + y\mathrm{e}^y\mathbf{j}$$

$$\text{(iii) } \mathbf{F} = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad \text{(iv) } \mathbf{F} = \ln(x^2+y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2+z^2)\mathbf{k}$$

4. Να βρεθεί η περιστροφή για τα πιο κάτω διανυσματικά πεδία στο σημείο που δίνεται:

$$\text{(i) } \mathbf{F} = xyz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k},\ (2,1,3) \quad \text{(ii) } \mathbf{F} = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k},\ (2,-1,3)$$

$$\text{(iii) } \mathbf{F} = \mathrm{e}^x\sin y\mathbf{i} - \mathrm{e}^x\cos y\mathbf{j},\ (0,0,1) \quad \text{(iv) } \mathbf{F} = \mathrm{e}^{-xyz}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-xyz}\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-xyz}\mathbf{k},\ (3,2,0)$$

5. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος των δοσμένων διαδρομών.

(i) $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}s,\quad C:\ \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1$

(ii) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s,\quad C:\ \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

6. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$ κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης C.

(i) C : το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(0,0)$ στο $(1,1)$.

(ii) C : διατρέχεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού πάνω στον κύκλο $x^2+y^2 = 4$ από το σημείο $(2,0)$ στο $(0,2)$.

7. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου C ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$.

(i) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j},\quad C:\ \mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(ii) $\mathbf{F}(x,y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j},\quad C:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4-t^2}\mathbf{j},\ -2 \le t \le 2$

(iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},\quad C:\ \mathbf{r}(t) = 2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi$

8. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (2x - y)\mathrm{d}x + (x + 3y)\mathrm{d}y$$

κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης C.

(i) C : τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο $(0,0)$ στο $(3,0)$ και από το $(3,0)$ στο $(3,3)$.

(ii) C : τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο $(0,0)$ στο $(0,-3)$ και από το $(0,-3)$ στο $(2,-3)$.

(iii) C : το τόξο της $y = x^{\frac{3}{2}}$ από το σημείο $(0,0)$ στο $(4,8)$.

9. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου C ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$.

(i) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ και (a) $\mathbf{r}_1(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2$, (b) $\mathbf{r}_2(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ και (a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 4$, (b) $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2$

(iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+2y)\mathbf{i} + (x^2 - z)\mathbf{j} + (2y - 4z)\mathbf{k}$ και (a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$, (b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t-1)^2\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$

(iv) $\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ και (a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi$, (b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$

10. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int_C [2(x+y)\mathbf{i} + 2(x+y)\mathbf{j}]\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου C είναι ομαλή καμπύλη από το σημείο $(-1,1)$ στο $(3,2)$

(ii) $\displaystyle\int_C \cos x \sin y \mathrm{d}x + \sin x \cos y \mathrm{d}y$, όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(0,-\pi)$ στο $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(1,1)$ στο $(2\sqrt{3}, 2)$

(iv) $\displaystyle\int_C \mathrm{e}^x \sin y \mathrm{d}x + \mathrm{e}^x \cos y \mathrm{d}y$, όπου C είναι το κυκλοειδές $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ από το σημείο $(0,0)$ στο $(2\pi, 0)$

11. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (z+2y)\mathrm{d}x + (2x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

όπου

(i) C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$,

(ii) C είναι τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο $(0,0,0)$ στο $(0,0,1)$ και από το $(0,0,1)$ στο $(1,1,1)$,

(iii) C είναι τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο $(0,0,0)$ στο $(1,0,0)$, από το $(1,0,0)$ στο $(1,1,0)$ και από το $(1,1,0)$ στο $(1,1,1)$.

12. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα (α) ευθέως και (β) με τη χρήση του θεωρήματος του Green.

(i) $\displaystyle\int_C xy\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$, όπου C είναι το ορθογώνιο με κορυφές $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$ και $(0,1)$

(ii) $\displaystyle\int_C x^2y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$ όπου C αποτελείται από το τόξο της παραβολής $y=x^2$ από το σημείο $(0,0)$ στο $(1,1)$ και από τα ευθύγραμμα τμήματα από το $(1,1)$ στο $(0,1)$ και από το $(0,1)$ στο $(0,0)$.

13. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int_C xy^2\mathrm{d}x + 2x^2y\mathrm{d}y$, όπου C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(2,2)$ και $(2,4)$.

(ii) $\displaystyle\int_C (y+\mathrm{e}^{\sqrt{x}})\mathrm{d}x + (2x+\cos y^2)\mathrm{d}y$, όπου C είναι το σύνορο της περιοχής που περικλείεται από τις παραβολές $y=x^2$ και $x=y^2$.

(iii) $\displaystyle\int_C y^3\mathrm{d}x - x^3y\mathrm{d}y$, όπου C είναι ο κύκλος $x^2+y^2=4$.

(iv) $\displaystyle\int_C (1-y^3)\mathrm{d}x + (x^3+\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y$, όπου C είναι το σύνορο της περιοχής που περικλείεται από τους κύκλους $x^2+y^2=4$ και $x^2+y^2=9$.

14. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

(i) $\mathbf{F}(x,y) = (y\cos x - xy\sin x)\mathbf{i} + (xy + x\cos x)\mathbf{j}$, C είναι το τρίγωνο από το $(0,0)$ στο $(0,4)$ στο $(2,0)$ στο $(0,0)$.

(ii) $\mathbf{F}(x,y) = (\mathrm{e}^{-x}+y^2)\mathbf{i} + (\mathrm{e}^{-y}+x^2)\mathbf{j}$, C αποτελείται από το τόξο της καμπύλης $y=\cos x$ από το $(-\frac{\pi}{2},0)$ στο $(\frac{\pi}{2},0)$ και από το ευθύγραμμο τμήμα από το $(\frac{\pi}{2},0)$ στο $(-\frac{\pi}{2},0)$.

(iii) $\mathbf{F}(x,y) = (y-\cos y)\mathbf{i} + x\sin y\mathbf{j}$, C είναι ο κύκλος $(x-3)^2+(y+4)^2=4$ που διατρέχεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

(iv) $\mathbf{F}(x,y) = \sqrt{x^2+1}\mathbf{i} + \tan^{-1}x\mathbf{j}$, C είναι το τρίγωνο από το $(0,0)$ στο $(1,1)$ στο $(0,1)$ στο $(0,0)$.

15. Να υπολογιστούν τα επιφανειακά ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\iint\limits_S x^2yz\mathrm{d}S$, όπου S είναι το κομμάτι του επιπέδου $z=1+2x+3y$ που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο $[0,3]\times[0,2]$.

(ii) $\displaystyle\iint\limits_S xz\mathrm{d}S$, όπου S είναι το κομμάτι του επιπέδου $2x+2y+z=4$ που βρίσκεται στο πρώτο οκτημόριο.

(iii) $\displaystyle\iint\limits_S y\mathrm{d}S$, όπου S είναι η επιφάνεια $z=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right),\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1.$

(iv) $\displaystyle\iint\limits_S x^2z^2\mathrm{d}S$, όπου S είναι το κομμάτι του κώνου $z^2=x^2+y^2$ μεταξύ των επιπέδων $z=1$ και $z=3$.