ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)}\ \int_0^1\int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\text{(iii)}\ \int_0^3\int_0^2 y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{(iv)}\ \int_1^3\int_1^2 \frac{1}{1+x+y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)}\ \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^2\int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{(iii)}\ \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \text{(iv)}\ \int_1^3\int_0^y \frac{4}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. (i) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού στο πρώτο ογδοημόριο που περικλείεται από την επιφάνεια $z=x^2$ και τα επίπεδα $x=2,\ y=3,\ y=0$ και $z=0$.

   (ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$ και πάνω από το ορθογώνιο $R=[-1,1]\times[-2,2]$.

   (iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z=1+\mathrm{e}^x\sin y$ και τα επίπεδα $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=\pi$ και $z=0$.

   (iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z=x\sec^2 y$ και τα επίπεδα $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=\frac{\pi}{4}$ και $z=0$.

4. (i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R x\cos(xy)\cos^2\pi x\mathrm{d}A,$$

   όπου $R=\{(x,y): 0\le x\le \frac{1}{2},\ 0\le y\le\pi\}$.

   (ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R \frac{y}{x^5+1}\mathrm{d}A,$$

   όπου $R=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$.

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)}\ \iint\limits_R \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(1,1)$ και $(0,1)$.

(ii) $$\iint_R \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η περιοχή που περικλείεται από τις καμπύλες $y=\sqrt{x},\ y=0$ και $x=1$.

(iii) $$\iint_R y\mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από τις παραβολές $x=y^2$ και $x=8-y^2$.

(iv) $$\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}A,$$

όπου R είναι η περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που περικλείεται από τις ευθείες $y=0$ και $y=\sqrt{3}x$ και τον κύκλο $x^2+y^2=9$.

6. (i) Να βρεθεί όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από τον κύλινδρο $x^2+y^2=9$ και τα επίπεδα $z=0$ και $z=3-x$.

   (ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από πάνω από την επιφάνεια $z=1-x^2-y^2$ και από κάτω από το xy-επίπεδο.

   (iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που είναι κάτω από την επιφάνεια $z=xy$ και πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(1,1),\ (4,1)$ και $(1,2)$.

   (iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τους κυλίνδρους $z=x^2$ και $y=x^2$ και τα επίπεδα $z=0$ και $y=4$.

7. Αφού γίνει αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

   (i) $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^4 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, (ii) $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   (iii) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, (iv) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8. Να σχεδιαστεί η περιοχή ολοκλήρωσης και στη συνέχεια να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:

   (i) $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, (ii) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

   (iii) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \sin(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, (iv) $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

9. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(ii) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \quad a>0$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

10. (i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r=4\sin\theta$ και εκτός της $r=2$.

(ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r=1$ και εκτός της $r=1+\cos\theta$.

11. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ για τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(i) $f(x,y)=x+y, \quad R=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

(ii) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad R=\{(x,y): x^2+y^2\leq 25,\ x\geq 0\}$

(iii) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad R=\{(x,y): x^2+y^2\geq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

(iv) $f(x,y)=9-x^2-y^2, \quad R=\{(x,y): x^2+y^2\leq 9,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

12. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, να γραφτεί το άθροισμα των δύο διπλών ολοκληρωμάτων ως ένα διπλό ολοκλήρωμα και στη συνέχεια να υπολογιστεί.

(i) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{5\sqrt{2}}{2}} \int_0^x xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{\frac{5\sqrt{2}}{2}}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

13. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας

(i) του τμήματος του κυλίνδρου $y^2+z^2=9$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο με κορυφές $(0,0),\ (4,0),\ (0,2)$ και $(4,2)$,

(ii) του τμήματος της επιφάνειας $z=y^2-x^2$ το οποίο βρίσκεται μεταξύ των κυλίνδρων $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=4$,

(iii) του τμήματος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z=1$.

14. Χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Gauss,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$