ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

   (i) $f(x,y) = \sin^{-1}(x+y)$ (ii) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{y^2+3}$

   (iii) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ (iv) $f(x,y,z) = z + \ln(1-x^2-y^2)$.

2. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2y^3)$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$

   (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$

   (v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$.

3. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, να βρεθούν τα όρια:

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \tan^{-1}\left[\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]$

   [$x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi$ και $(x,y,z)\to(0,0,0) \Rightarrow \rho\to 0^+$]

4. Να βρεθεί η περιοχή όπου η f είναι συνεχής:

   (i) $f(x,y,z) = 3x^2\mathrm{e}^{yz}\cos(xyz)$ (ii) $f(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2)$

   (iii) $f(x,y,z) = \frac{y+1}{x^2+y^2-1}$ (iv) $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+3z^2}$.

5. Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}\right]$

   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+(y-1)^2}\right]$.

6. Έστω η συνάρτηση

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases} .$$

   Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

7. Να βρεθούν οι $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ για τις πιο κάτω συναρτήσεις:

   (i) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ (ii) $f(x,y) = x^3\mathrm{e}^{-y} + y^3\sec\sqrt{x}$

   (iii) $f(x,y) = (y^2\tan x)^{-\frac{4}{3}}$ (iv) $f(x,y) = \cosh(\sqrt{x})\sinh^2(xy^2)$.

8. Χρησιμοποιώντας πεπλεγμένη παραγώγιση, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (i) $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}=1$ (ii) $x^2+z\sin(xyz)=0$.

9. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

   (i) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y+\mathrm{e}^y\sin x$

   (ii) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

   (iii) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

10. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(-1,1,5)$ της καμπύλης η οποία είναι η τομή της επιφάνειας $z=x^2+4y^2$ και του επιπέδου:

    (i) $x=-1$ (ii) $y=1$.

11. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

    Να αποδειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

12. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

    (i) $z=3x^2y^3,\quad x=t^4,\ y=t^2$

    (ii) $z=\ln(2x^2+y),\quad x=\sqrt{t},\ y=t^{\frac{2}{3}}$

    (iii) $z=3\cos x-\sin xy,\quad x=\frac{1}{t},\ y=3t$

    (iv) $z=\sqrt{1+x-2xy^4},\quad x=\ln t,\ y=t$.

13. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

    (i) $z=3x-2y,\quad x=u+v\ln u,\ y=u^2-v\ln v$

    (ii) $z=\mathrm{e}^{x^2y},\quad x=\sqrt{uv},\ y=\frac{1}{v}$

    (iii) $z=\cos x\sin y,\quad x=u-v,\ y=u^2+v^2$

    (iv) $z=\tan^{-1}(x^2+y^2),\quad x=\mathrm{e}^u\sin v,\ y=\mathrm{e}^u\cos v$.

14. (i) Έστω $z=\mathrm{e}^x f(x-y)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

    (ii) Έστω $z=f(y+cx)+g(y-cx)$, όπου $c\neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

15. Χρησιμοποιώντας ολικό διαφορικό, να βρεθεί κατά προσέγγιση η αλλαγή της $f(x,y)$ όταν (x,y) αλλάζει από το P στο Q στις πιο κάτω περιπτώσεις:

    (i) $f(x,y)=\frac{x+y}{xy},\quad P(-1,-2),\ Q(-1.02,-2.04)$

    (ii) $f(x,y)=\ln\sqrt{1+xy},\quad P(0,2),\ Q(-0.09,1.98)$.

16. Για τις πιο κάτω συναρτήσεις, να βρεθεί κατά προσέγγιση η μεταβολή της συνάρτησης όταν (x,y) αλλάζει από το σημείο $(2,1)$ στο σημείο $(2.1,1.05)$.

    (i) $f(x)=16-x^2-y^2$ (ii) $f(x)=\dfrac{y}{x}$ (iii) $f(x)=y\mathrm{e}^x$ (iv) $f(x)=x\cos y$

17. Η γωνία θ ενός ορθογωνίου τριγώνου υπολογίζεται από τον τύπο

    $$\theta=\sin^{-1}\frac{a}{c}$$

    όπου a είναι το μήκος της πλευράς που είναι απέναντι του θ και c είναι το μήκος της υποτείνουσας. Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις $a=3\text{cm}$ και $c=5\text{cm}$ έχουν η κάθε μια μέγιστο δυνατό σφάλμα ίσο με 0.01cm. Χρησιμοποιώντας διαφορικά, να βρεθεί κατά προσέγγιση το μέγιστο δυνατό σφάλμα στον υπολογισμό της θ.

18. Αφού βρεθεί το κατάλληλο μοναδιαίο διάνυσμα στη μορφή $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$, να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο P στην κατεύθυνση του σημείου Q.

    (i) $f(x,y)=x^2+3y^2,\quad P(1,1),\ Q(4,5)$

    (ii) $f(x,y)=\cos(x+y),\quad P(0,\pi),\ Q(\frac{\pi}{2},0)$

    (iii) $f(x,y)=e^y\sin x,\quad P(0,0),\ Q(2,1)$

    (iv) $f(x,y)=\sin 2x\cos y,\quad P(\pi,0),\ Q(\frac{\pi}{2},\pi)$.

19. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο P στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$:

    (i) $f(x,y)=y^2\ln x,\quad P(1,4),\ \mathbf{a}=-3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

    (ii) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y,\quad P(0,\frac{\pi}{4}),\ \mathbf{a}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

    (iii) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\quad P(-2,2),\ \mathbf{a}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$

    (iv) $f(x,y)=x\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^x,\quad P(0,0),\ \mathbf{a}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

20. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση στην οποία η f έχει τη μέγιστη αύξηση στο σημείο P. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο P σε αυτή την κατεύθυνση:

    (i) $f(x,y)=20-x^2-y^2,\quad P(-1,-3)$

    (ii) $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy},\quad P(2,3)$

    (iii) $f(x,y)=\cos(3x-y),\quad P(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$

    (iv) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}},\quad P(3,1)$.

21. Έστω $f(x,y)=\frac{y}{x+y}$. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο $D_{\mathbf{u}}f(2,3)=0$.

22. Δίνεται ότι $D_{\mathbf{u}}f(1,2)=-5$ αν $\mathbf{u}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}$ και $D_{\mathbf{v}}f(1,2)=10$ αν $\mathbf{v}=\frac{4}{5}\mathbf{i}+\frac{3}{5}\mathbf{j}$. Να βρεθούν:

    (i) $f_x(1,2), \quad f_y(1,2)$

    (ii) η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $(1,2)$ προς την κατεύθυνση της αρχής των αξόνων.

23. Η θερμοκρασία στο σημείο (x,y) μιας μεταλλικής πλάκας στο επίπεδο xy ορίζεται από τον τύπο $T(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

    (i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο $(1,1)$ στην κατεύθυνση του

    $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

    (ii) Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στο $(1,1)$ και θέλει να κινηθεί στην κατεύθυνση όπου η θερμοκρασία έχει την μέγιστη μείωση. Να βρεθεί αυτή η κατεύθυνση.

24. Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία των συναρτήσεων:

    (i) $f(x,y)=2x^2-4xy+y^4+2$

    (ii) $f(x,y)=x^2+y-\mathrm{e}^y$

    (iii) $f(x,y)=2y^2x-yx^2+4xy$

    (iv) $f(x,y)=y\sin x$.

25. Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία των συναρτήσεων:

    (i) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

    (ii) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+2$

    (iii) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$

    (iv) $f(x,y)=(\frac{1}{2}-x^2+y^2)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$.

26. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στο δοσμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο R.

    (i) $f(x,y)=xy-x-3y$ και R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(0,4)$ και $(5,0)$.

    (ii) $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ και R είναι η τετραγωνική περιοχή με κορυφές $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ και $(2,0)$.

    (iii) $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ και R είναι η κυκλική περιοχή $x^2+y^2\leq 4$.

27. (i) Να βρεθούν όλα τα σημεία πάνω στο επίπεδο $x+y+z=5$ στο πρώτο ογδοημόριο για τα οποία η συνάρτηση $f(x,y,z)=xy^2z^2$ λαμβάνει μέγιστη τιμή.

    (ii) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $x^2-yz=5$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.