ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

1. (i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = (2+t)\mathbf{i} + (1-2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο xz.

   (ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1+2t)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο $3x - y - z = 2$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

   (i) $\lim_{t\to 2}(t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$

   (ii) $\lim_{t\to\pi}(\cos 3t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k})$

   (iii) $\lim_{t\to+\infty}\left(\tan^{-1} t\mathbf{i} + \dfrac{t}{t^2+3}\mathbf{j} + \cos\dfrac{2}{t}\mathbf{k}\right)$

   (iv) $\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{3}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{\ln t}{t^2-1}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}\right)$.

3. (i) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των καμπυλών

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_2(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j} + (5-t)\mathbf{k}$$

   τέμνονται στο σημείο $P(1,1,3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ στο σημείο P.

   (ii) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των καμπυλών

$$\mathbf{r}_1(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t^2+3)\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_2(t) = (1-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3+4)\mathbf{k}$$

   τέμνονται στο σημείο $P(2,1,3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ στο σημείο P.

4. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$:

   (i) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 4u + 1$

   (ii) $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}, \quad t = \pi u$.

5. (i) Έστω ότι $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j},\ a > 0$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος.

   (ii) Έστω ότι $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t\sin t)\mathbf{i} + (\mathrm{e}^t\cos t)\mathbf{j}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ είναι κάθετα μεταξύ τους για κάθε τιμή του t.

6. Ένα σωματίδιο κινείται στο yz-επίπεδο κατά μήκος της καμπύλης που ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{j} + 3\sin t\mathbf{k}$.

   (i) Να περιγραφεί η καμπύλη.

   (ii) Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $\|\mathbf{r}'(t)\|$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{t}\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}\right) \mathrm{d}t$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}\right) \mathrm{d}t$

(iv) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left((3-t)^{3/2}\mathbf{i} + (3+t)^{3/2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \mathrm{d}t.$

8. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{i} + \mathrm{e}^t\mathbf{j},\ \ \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i},\ \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{r}'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(iii) $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + \frac{t}{t^2+1}\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$

(iv) $\mathbf{r}''(t) = (4\sin 2t)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i},\ \mathbf{r}'(0) = \mathbf{k}.$

9. Να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών στο διάστημα που δίνεται:

(i) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$

(ii) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(iii) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 1$

(iv) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{k},\quad -1 \le t \le 1.$

10. Να βρεθεί η καμπυλότητα για τις πιο κάτω καμπύλες.

(i) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k},$

(ii) $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k},$

(iii) $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\sin t\mathbf{k},$

(iv) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{2t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{2t}\cos t\mathbf{j} + \mathrm{e}^{2t}\sin t\mathbf{k}.$

11. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες μια καμπύλη η οποία ορίζεται παραμετρικά, $r = r(t),\ \theta = \theta(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b$, έχει μήκος τόξου

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών, στο διάστημα που δίνεται:

(i) $r = \mathrm{e}^{2t},\ \theta = t,\ z = \mathrm{e}^{2t},\quad 0 \le t \le \ln 2$

(ii) $r = t^2,\ \theta = \ln t,\ z = \frac{1}{3}t^3,\quad 1 \le t \le 2.$

12. Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για τις πιο κάτω καμπύλες, στο σημείο που δίνεται:

   (i) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

   (ii) $x = \mathrm{e}^t \cos t,\ y = \mathrm{e}^t \sin t,\ z = \mathrm{e}^t, \quad t = 0$

   (iii) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$

   (iv) $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t, \quad t = \ln 2.$

13. Να βρεθούν το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$, το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης a_T και το μέτρο της κάθετης επιτάχυνσης a_N για τις πιο κάτω καμπύλες, στο σημείο που δίνεται:

   (i) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

   (ii) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

   (iii) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t \cos t\mathbf{i} + \mathrm{e}^t \sin t\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

   (iv) $\mathbf{r}(t) = 4\cos 3t\mathbf{i} + 4\sin 3t\mathbf{j}, \quad t = \pi.$

14. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\mathbf{a}(t) = a_T\mathbf{T}(t) + a_N\mathbf{N}(t)$, να βρεθεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(t)$ για τις πιο κάτω καμπύλες, στο σημείο που δίνεται:

   (i) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{3}$

   (ii) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$

   (iii) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t \sin t\mathbf{i} + \mathrm{e}^t \cos t\mathbf{j} + \mathrm{e}^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

   (iv) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{k}, \quad t = 0.$

15. (i) Να βρεθεί η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos t.$$

   (ii) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης

$$x = \mathrm{e}^t,\ y = \mathrm{e}^{-t},\ z = \sqrt{2}t.$$

16. Έστω $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Να βρεθούν:

   (i) $\|\mathbf{r}'(t)\|$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (iii) $\displaystyle\int_1^3 \|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t.$

17. (i) Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r} = (t - t^2)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}.$$

   Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου και η θέση του όταν έχει αυτή τη ταχύτητα.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r} = \sin 3t\mathbf{i} - 2\cos 3t\mathbf{j}.$$

(iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r} = 3\cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}.$$

18. Να βρεθεί το σημείο πάνω στην τροχιά

$$\mathbf{r} = \left(t^2 - 5t\right)\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k},$$

στο οποίο η ταχύτητα τέμνει κάθετα την επιτάχυνση.

19. (i) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ με σταθερή ταχύτητα 3 μονάδες/s. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x.

(ii) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \mathrm{e}^x$ με σταθερή ταχύτητα 2 μονάδες/s. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x.