ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1. Να περιγραφεί η επιφάνεια της οποίας η εξίσωση δίνεται πιο κάτω:

   (i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$

   (ii) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$

   (iv) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0.$

2. (i) Έστω $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές $c_1,\ c_2,\ c_3$ τέτοιες ώστε

   $$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (-1, 1, 5).$$

   (ii) Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{w} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές $c_1,\ c_2,\ c_3$ τέτοιες ώστε

   $$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

3. Έστω $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Να περιγραφεί το σύνολο των σημείων (x, y, z) για τα οποία

   (i) $\|\mathbf{r}\| = 2$ (ii) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 3$ (iii) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \leq 1$

4. (i) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{u} = (7, 0, -6)$, αλλά διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

   (ii) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, αλλά διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

5. Να δειχθεί ότι τα διευθύνοντα συνημίτονα ενός διανύσματος ικανοποιούν την εξίσωση

   $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ και $P(-3, 1, 2)$.

   (i) Να βρεθεί το $\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$.

   (ii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

7. Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

   $$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

   όπου $c_1,\ c_2,\ c_3$ είναι σταθερές και ορίζονται από τον τύπο

   $$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

   Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

8. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές $A(1,0,1)$, $B(0,2,3)$ και $C(2,1,0)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το μήκος του ύψους από τη κορυφή C στη πλευρά AB.

9. (i) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $\left(4\sqrt{3}, 4, -4\right)$ σε κυλινδρικές.

   (ii) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $\left(4, \frac{\pi}{6}, 3\right)$ σε καρτεσιανές.

   (iii) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $\left(1, \sqrt{3}, -2\right)$ σε σφαιρικές.

   (iv) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $\left(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ σε καρτεσιανές.

   (v) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3\right)$ σε σφαιρικές.

   (vi) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$ σε κυλινδρικές.

10. Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια, τότε να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχουν ίσα μήκη.

11. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Να δειχθεί ότι η διανυσματική εξίσωση

    $$(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{b})=0$$

    αντιπροσωπεύει σφαίρα και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα.

12. Αν $\mathbf{c}=|\mathbf{a}|\mathbf{b}+|\mathbf{b}|\mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ είναι μη-μηδενικά διανύσματα, να δειχθεί ότι το $\mathbf{c}$ διχοτομεί τη γωνία μεταξύ $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

13. Αν $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sqrt{3}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{j}$, να βρεθεί η γωνία μεταξύ $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

14. Αν $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=2$, να βρεθούν:

    (i) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ (ii) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})$ (iii) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w})$ (iv) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$