

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

(i) Ναδειχθεί ότι e^{2x} και e^{3x} είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

(ii) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(iii) Να βρεθεί η ειδική λύση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Να εξηγηθεί γιατί η λύση είναι μοναδική και να δοθεί το διάστημα όπου ορίζεται.

2. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0.$$

(i) Ναδειχθεί ότι x^2 και x^{-2} είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα $(0, \infty)$.

(ii) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(iii) Να βρεθεί η ειδική λύση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $y(2) = 3$, $y'(2) = -1$. Να εξηγηθεί γιατί η λύση είναι μοναδική και να δοθεί το διάστημα όπου ορίζεται.

3. Για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις, δίνεται μια λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y(x) = y_1(x)u(x)$, να βρεθεί μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση και στη συνέχεια να δοθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(i) $(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$, $y_1 = x$

(ii) $(2x + 1)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$

(iii) $(x^2 + x)y'' - (x^2 - 2)y' - (x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$

4. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $2y'' + 3y' - 2y = 0$

(ii) $4y'' - 4y' + y = 0$

(iii) $16y'' + 32y' + 25y = 0$

(iv) $y'' - 8y' + 16y = 0$

(v) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(vi) $4y'' + y = 0$

5. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $y'' - y' - 12y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

(ii) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

(iii) $y'' - 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

(iv) $4y'' + 4y' + 37y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

6. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

- (i) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$
- (ii) $y'' + 2y' + 2y = 10 \sin 4x$
- (iii) $y'' + 2y' + 10y = 5xe^{-2x}$
- (iv) $y'' + 4y = 4 \sin 2x + 8 \cos 2x$
- (v) $y'' - 4y = 16xe^{2x}$
- (vi) $y'' + y = x \sin x$

7. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

- (i) $y'' - 8y' + 15y = 9xe^{2x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 10$
- (ii) $y'' + 6y' + 9y = 27e^{-6x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$
- (iii) $y'' - 10y' + 29y = 8e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$
- (iv) $y'' - 2y' + y = 2xe^{2x} + 6e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

8. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

- (i) $y'' + y = \sec x$
- (ii) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$
- (iii) $y'' - 2y' + y = xe^x \ln x$, $x > 0$
- (iv) $y'' + y = \tan^3 x$
- (v) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$
- (vi) $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{x}$

9. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τις δύο δοσμένες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

- (i) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$
- (ii) $(2x+1)(x+1)y'' + 2xy' - 2y = (2x+1)^2$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = (x+1)^{-1}$
- (iii) $(\sin^2 x)y'' - (2 \sin x \cos x)y' + (\cos^2 x + 1)y = \sin^3 x$,
 $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = x \sin x$

10. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

- (i) $4x^2y'' - 4xy' + 3y = 0$
- (ii) $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$
- (iii) $9x^2y'' + 3xy' + y = 0$
- (iv) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$
- (v) $x^2y'' + xy' + 4y = 2x \ln x$
- (vi) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 5x^2$

11. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

- (i) $x^2y'' - 2xy' - 10y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 4$
- (ii) $x^2y'' - 2y = 4x - 8, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -1$
- (iii) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 4x^2 - 6x^3, \quad y(2) = 4, \quad y'(2) = -1$
- (iv) $x^2y'' - 6y = \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{6}, \quad y'(1) = -\frac{1}{6}$

12. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x+2)^2y'' - (x+2)y' - 3y = 0.$$