ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

1. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{(\mathrm{e}^y+1)^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^y} = 0$ (ii) $(y - yx^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)^2$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x(\cos 2y - \cos^2 y)$

(v) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{1-y^2}$ (vi) $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$

2. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $y(x^2+3x+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x+4)(y^2+1) = 0$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2xy+3y^2}{2xy+x^2}$

(iii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\tan\dfrac{y}{x} + y$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $(1+2x)y' = 3+y, \quad y(0) = -2$

(ii) $y' = 2x\sec y, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}$

(iii) $(y^4+2y)y' = x\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = -1$

(iv) $y' = (x-3)(y^2+1), \quad y(0) = 1$

4. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $(y-2x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x = 0$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2+xy}{x^2}$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y-x}{y+x}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$

5. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $(x^2+2xy)y' = 2(xy+y^2), \quad y(1) = 2$

(ii) $xy' = 3y - x, \quad y(1) = 1$

(iii) $xy^2y' = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$

(iv) $x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}y' - (x + y\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}) = 0, \quad y(1) = 0$

6. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ (ii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2x+1}{x+1}y = x-1$

(iii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy + y - 1 = 0$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \cos x$

(v) $(1+\sin x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x - y\cos x$ (vi) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 3x^2\mathrm{e}^{-3x}$

7. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

$$\text{(i)} \qquad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8$$

$$\text{(ii)} \qquad (\mathrm{e}^x + 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^x[y - 3(\mathrm{e}^x + 1)^2] = 0, \quad y(0) = 4$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(\tfrac{\pi}{4}) = 1$$

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \sin 2x, \quad y(0) = 0$$

8. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\text{(i)}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x+1}{2x}y = \frac{x+1}{xy}$$

$$\text{(iii)}\ x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \frac{1}{y^2} \qquad \text{(iv)}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^4 - y$$

9. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2$$

$$\text{(ii)} \qquad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = (xy)^{\frac{3}{2}}, \quad y(1) = 4$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = -y^3, \quad y(0) = 1$$

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y + 6\mathrm{e}^x y^{\frac{3}{2}} = 0, \quad y(0) = \tfrac{1}{4}$$

10. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων Riccati, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη λύση.

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x, \quad y_1(x) = 1$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + xy + 1, \quad y_1(x) = x$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1), \quad y_1(x) = x$$

11. Αφού βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων Riccati, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη λύση, στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - \left(\frac{4}{x} + 3\right)y + 2y^2, \quad y_1(x) = \frac{1}{x}, \quad y(1) = \frac{5}{2}$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4} + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)y - \frac{y^2}{x^2}, \quad y_1(x) = -\frac{1}{x}, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - 4\cos x + 4\sin x + (4\cos x - 4\sin x - 1)y + (\sin x - \cos x)y^2,$$
$$y_1(x) = 2, \quad y(0) = 3$$

12. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς και στην συνέχεια να λυθούν.

(i) $(2xy+1)\mathrm{d}x + (x^2+4y)\mathrm{d}y = 0$

(ii) $(6xy+2y^2-5)\mathrm{d}x + (3x^2+4xy-6)\mathrm{d}y = 0$

(iii) $(y^2+1)\cos x\mathrm{d}x + 2y\sin x\mathrm{d}y = 0$

(iv) $(y\sec^2 x + \sec x\tan x)\mathrm{d}x + (\tan x + 2y)\mathrm{d}y = 0$

13. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)\mathrm{d}x + (2x^3y - 3xy^2 + 1)\mathrm{d}y = 0, \quad y(-2) = 1$

(ii) $(2y\sin x\cos x + y^2\sin x)\mathrm{d}x + (\sin^2 x - 2y\cos x)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 3$

(iii) $(y\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + y^2)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + 2xy)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 6$

(iv) $\dfrac{1+8xy^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x + \dfrac{2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 8$

14. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(4x+3y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$$

δεν είναι ακριβής. Αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής x^n, όπου n είναι θετικός ακέραιος, να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

15. Αφού βρεθεί ο κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(5xy+4y^2+1)\mathrm{d}x + (x^2+2xy)\mathrm{d}y = 0$

(ii) $(2x+\tan y)\mathrm{d}x + (x - x^2\tan y)\mathrm{d}y = 0$

(iii) $(xy^2+y^2+y)\mathrm{d}x + (2xy+1)\mathrm{d}y = 0$

(iv) $(2xy^2+y)\mathrm{d}x + (2y^3-x)\mathrm{d}y = 0$

16. Αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής x^my^n, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(4xy^2+6y)\mathrm{d}x + (5x^2y+8x)\mathrm{d}y = 0$

(ii) $(8x^2y^3 - 2y^4)\mathrm{d}x + (5x^3y^2 - 8xy^3)\mathrm{d}y = 0$

17. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(2x+y+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5x + 2y + 1 = 0$

(ii) $(6x-2y-3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x - y + 1$

(iii) $(2x+y-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x + 2y + 3$

(iv) $(x+5y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10x - 4y + 12$

18. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

$$\text{(i)} \qquad (x+y+2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x+y+6, \quad y(2) = -2$$

$$\text{(ii)} \qquad (4x+6y+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2x+3y+1 = 0, \quad y(-2) = 2$$

19. Αφού λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις ως προς y ή ως προς x, στη συνέχεια να βρεθεί η γενική τους λύση.

$$\text{(i)} \qquad xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad x(y'^2 - 1) = 2y'$$

$$\text{(iii)} \qquad y = 2xy' + y^2 y'^3$$

$$\text{(iv)} \qquad 2xy' - y = y' \ln(yy')$$

$$\text{(v)} \qquad y + xy' = 4\sqrt{y'}$$

20. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \ln y$, να μετασχηματιστεί η μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$$

σε γραμμική.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' - 4x^2 y + 2y \ln y = 0.$$

21. Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη αντικατάσταση, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

$$\text{(i)} \qquad (2x \sin y \cos y)y' = 4x^2 + \sin^2 y, \quad u = \sin y$$

$$\text{(ii)} \qquad (x + \mathrm{e}^y)y' = x\mathrm{e}^{-y} - 1, \quad u = \mathrm{e}^y$$

$$\text{(iii)} \qquad (3xy)^2 + x^{\frac{3}{2}} y' = y^2, \quad u = \frac{1}{y}$$

$$\text{(iv)} \qquad y' = 3y^2 - \frac{8}{x}y + \frac{4}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x} + u$$

$$\text{(v)} \qquad yy'' + y'^2 = yy', \quad u = yy'$$

22. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{y} + 2 = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad (3 + 2x + 4y)y' = 1 + x + 2y$$

$$\text{(iii)} \qquad y(2x - y + 2)\mathrm{d}x + 2(x - y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\text{(iv)} \qquad (1+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x(1+x)^2$$

$$\text{(v)} \qquad xyy' + y^2 - \sin x = 0$$

$$\text{(vi)} \qquad 5y + y'^2 = x(x + y')$$

23. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές για τις πιο κάτω οικογένειες καμπυλών.

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & y = cx^3 \\
\text{(ii)} & y = \mathrm{e}^{cx} \\
\text{(iii)} & y = \dfrac{cx^2}{x+1} \\
\text{(iv)} & x^2 = 2y - 1 + c\mathrm{e}^{-2y} \\
\text{(v)} & x^2 - y^2 = cx^3
\end{array}$$

24. (i) Να βρεθεί η οικογένεια των πλάγιων τροχιών που τέμνει την οικογένεια των παραβολών $y^2 = cx$ σε μια γωνία $\frac{\pi}{3}$.

(ii) Να βρεθεί η οικογένεια των πλάγιων τροχιών που τέμνει την οικογένεια των καμπυλών $x + y = cx^2$ σε μια γωνία ίση με $\tan^{-1} 2$.