

Ασκήσεις 7

1. Να βρεθούν για κάθε μια διαφορική εξίσωση δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από το ομαλό σημείο $x = 0$.

 - (i) $(x - 1)y'' + y' = 0$
 - (ii) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
 - (iii) $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$
 - (iv) $y'' - (x + 1)y' - y = 0$
2. Να βρεθεί η λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων σε μορφή δυναμοσειράς που ικανοποιεί τις δοσμένες αρχικές συνθήκες.

 - (i) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$
 - (ii) $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
3. Να βρεθούν τα μη ομαλά σημεία των διαφορικών εξισώσεων και στην συνέχεια να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός που μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση σε μια νέα που έχει μη ομαλό σημείο το $x = 0$.

 - (i) $(x + 2)y'' + xy' - 3y = 0$
 - (ii) $(2x - 1)y'' + y' - (x + 2)y = 0$
 - (iii) $(x^2 - 9)y'' + (2x + 1)y' + xy = 0$
 - (iv) $(3x^2 - 2x - 1)y'' + (1 - x)y' + (2x + 1)y = 0$
4. Να βρεθούν τα μη ομαλά σημεία των διαφορικών εξισώσεων και να προσδιοριστεί αν είναι σύνηθες μη ομαλά σημεία.

 - (i) $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$
 - (ii) $(x^2 - 9)^2y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$
 - (iii) $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$
 - (iv) $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y$
 - (v) $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0$
5. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenius να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων, δίνοντας τους πρώτους πέντε μη μηδενικού όρους και το ελάχιστο διάστημα σύγκλισης. [το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες μη-ομαλό σημείο].

 - (i) $2x^2y'' + (2x^2 + x)y' + (3x - 1)y = 0$
 - (ii) $2xy'' + y' + (x - 2)y = 0$
 - (iii) $3x^2y'' + (x^2 + 5x)y' - (x + 1)y = 0$
 - (iv) $(2x - x^2)y'' + (3x + 5)y' + (x + 5)y = 0$
 - (v) $2xy'' + (x^2 + 1)y' + (x^2 - 1)y = 0$
6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenius να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων, δίνοντας τους πρώτους πέντε μη μηδενικού όρους και το ελάχιστο διάστημα σύγκλισης. [το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες μη-ομαλό σημείο].

 - (i) $xy'' + (x + 1)y' + 2xy = 0$
 - (ii) $x^2y'' - xy' + (x^2 - x + 1)y = 0$
 - (iii) $xy'' + (1 - x^2)y' - y = 0$
 - (iv) $x^2y'' + 3(x^2 + x)y' + (2x + 1)y = 0$
 - (v) $(x^2 - x)y'' + (x^2 - 1)y' - (x + 2)y = 0$

7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenius να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων, δίνοντας τους πρώτους πέντε μη μηδενικού όρους και το ελάχιστο διάστημα σύγκλισης. [το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες μη-ομαλό σημείο].

(i) $4x^2y'' + (2x^2 + 4x)y' + (x - 1)y = 0$

(ii) $(2x^2 + x)y'' + 3y' - (x^2 + 4)y = 0$

(iii) $x^2y'' + (2x^2 + 3x)y' - 3y = 0$

(iv) $x^2y'' + (2x^2 - 3x)y' + 3y = 0$

(v) $x^2y'' + x^2y' + (3x - 2)y = 0$

8. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenius να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων [το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες μη-ομαλό σημείο].

(i) $2xy'' - y' + 2y = 0$

(ii) $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$

(iii) $2x^2y'' - x(x - 1)y' - y = 0$

(iv) $xy'' + 2y' - xy = 0$

(v) $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$

(vi) $xy'' + (x - 1)y' - 2y = 0$