Ασκήσεις 6

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$ για τις πιο κάτω συναρτήσεις

$$\text{(i) } f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases} \qquad \text{(ii) } f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

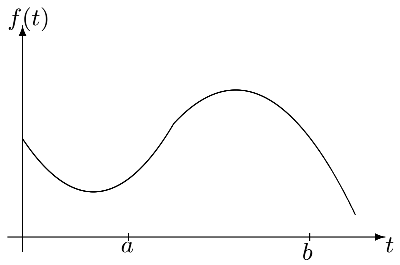
$$\text{(iii) } f(t) = e^{-t}\sin t \qquad \text{(iv) } f(t) = t\cos t \qquad \text{(v) } f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$$

$$\text{(vi) } f(t) = e^{t}\sinh t \qquad \text{(vii) } f(t) = \sin 2t\cos 2t \qquad \text{(viii) } f(t) = \sin t\cos 2t$$

2. Να υπολογιστούν:

$$\text{(i) } \mathcal{L}\{t^3e^{-2t}\} \qquad \text{(ii) } \mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\} \qquad \text{(iii) } \mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-2)\} \qquad \text{(iv) } \mathcal{L}\{\cos 2t\,\mathcal{U}(t-\pi)\}$$

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ δίνεται από το πιο κάτω σχήμα



Σχήμα 1:

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων.

(i) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-a)$

(ii) $f(t-b)\mathcal{U}(t-b)$

(iii) $f(t)\mathcal{U}(t-a)$

(iv) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$

(v) $f(t)\mathcal{U}(t-a) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$

(vi) $f(t-a)\mathcal{U}(t-a) - f(t-a)\mathcal{U}(t-b)$

4. Να γραφούν οι πιο κάτω συναρτήσεις συναρτήσει μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace για την καθεμιά.

$$\text{(i) } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases} \qquad \text{(ii) } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$$

$$\text{(iii) } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases} \qquad \text{(iv) } f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

5. Να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2) = f(t) \text{ για } t > 0.$$

6. Να βρεθούν:

(i) $\mathcal{L}\{1 * t^3\}$ (ii) $\mathcal{L}\{t^2 * t^4\}$ (iii) $\mathcal{L}\{e^{-t} * e^t\cos t\}$

7. Να βρεθούν :

(i) $\mathcal{L}\{t\cos at\}$ (ii) $\mathcal{L}\{t^2\sin t\}$ (iii) $\mathcal{L}\{t^3\cos t\}$

(iv) $\mathcal{L}\{\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\}$ (v) $\mathcal{L}\{\dfrac{\sinh t}{t}\}$

8. Να δειχθεί ότι

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-3t}\sin t\mathrm{d}t = \frac{3}{50}$ (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\mathrm{d}t = \ln 2$

9. Να βρεθεί η $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

(i) $F(s) = \dfrac{(s+1)^3}{s^4}$ (ii) $F(s) = \dfrac{1}{4s+1}$ (iii) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$

(iv) $F(s) = \dfrac{2s-6}{s^2+9}$ (v) $F(s) = \dfrac{1}{s^2-16}$ (vi) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

10. Να βρεθεί η $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

(i) $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^3}$ (ii) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$ (iii) $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}$

(iv) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^3}$ (v) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$ (vi) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

11. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$ να βρεθούν:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$

(iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$ (iv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2}\right\}$

12. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Heaviside, να υπολογιστούν:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

(iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$

13. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y'' - 6y' + 9y = t$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(ii) $y'' - y' = e^t \cos t$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(iii) $y^{(4)} - y = t$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(iv) $y'' + 4y = \sin t\ \mathcal{U}(t-2\pi)$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(v) $y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi)$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

14. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y'' + 2y' + y = 0$ $\quad y'(0) = 2, \quad y(1) = 2$

(ii) $ty'' - y' = t^2$ $\quad y(0) = 0$

15. Να λυθούν τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων τα οποία ικανοποιούν τις δοσμένες συνθήκες:

(i)
$$\begin{aligned} x'' + x - y = 0, &\quad x(0) = 0,\ x'(0) = -2 \\ y'' + y - x = 0, &\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x'' + 3y' + 3y = 0, &\quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2 \\ x'' + 3y = te^{-t}, &\quad y(0) = 0 \end{aligned}$$

16. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y'' - y' - 2y = 18\mathrm{e}^{-t}\sin 3t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3, \\ \text{(ii)} & y'' + 7y' + 10y = 4t\mathrm{e}^{-3t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1, \\ \text{(iii)} & y'' + 3y' + 2y = 10\cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 7, \\ \text{(iv)} & y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 20\sin t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2. \end{array}$$

17. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y'' + 4y = \left\{ \begin{array}{ll} -4t + 8\pi, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{array} \right., \quad y(0) = 2, \ \ y'(0) = 0, \\ \text{(ii)} & y' - 3y = \left\{ \begin{array}{ll} 10\sin t, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{array} \right., \quad y(0) = 0. \end{array}$$

18. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & ty'' - 2ty' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1, \\ \text{(ii)} & 2ty'' + ty' - y = -3, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1. \end{array}$$

19. Να λυθεί το σύστημα το οποίο ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες

$$\begin{array}{l} -x' + y' = 0, \quad x'(0) = 5, \\ -x' + y' + z' = 0, \quad y'(0) = 2, \\ x' - y' - 2z' = 0, \quad z'(0) = 2. \end{array}$$

20. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y' + 5y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση στη περίπτωση όπου $f(t) = \mathrm{e}^t$.