Ασκήσεις 5

1. Να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών, αφού μετατραπούν σε προβλήματα αρχικών με μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

(i) $x_1' = -2x_1 + x_1, \;\; x_2' = -5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 2, \; x_2(0) = -1$

(ii) $x_1' = 2x_1 - 6x_1 + 2t, \;\; x_2' = 3x_1 - 7x_2 + t - 2, \quad x_1(0) = 2, \; x_2(0) = -1$

(iii) $x_1' = -8x_1 - 9x_1 + 17\cos t - 8\sin t, \;\; x_2' = 4x_1 + 4x_2 - 8\cos t + 2\sin t,$
$x_1(0) = 7, \; x_2(0) = -3$

2. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = -4x_1 + x_2, \;\; x_2' = -\frac{5}{2}x_1 + 2x_2$

(ii) $x_2' = -\frac{5}{2}x_1 + 2x_2, \;\; x_2' = \frac{3}{4}x_1 - 2x_2$

(iii) $x_1' = x_1 + x_2 - x_3, \;\; x_2' = 2x_2, \;\; x_3' = x_2 - x_3$

(iv) $x_1' = 2x_1 - 7x_2, \;\; x_2' = 5x_1 + 10x_2 + 4x_3, \;\; x_3' = 5x_2 + 2x_3$

3. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{X}$ (ii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

(iii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$ (iv) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

4. Να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $x_1' = -7x_1 + 10x_2, \;\; x_2' = -5x_1 + 8x_2, \quad x_1(0) = -5, \; x_2(0) = -2$

(ii) $x_1' = -\frac{5}{2}x_1 + 3x_2, \;\; x_2' = -\dfrac{3}{2}x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 2$

(iii) $x_1' = 5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \;\; x_2' = x_1 - x_3, \quad x_3' = 4x_1 - 4x_2 - 2x_3,$
$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 2, \; x_3(0) = -1$

(iv) $x_1' = -x_1 - x_2 - x_3, \;\; x_2' = -2x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3,$
$x_1(0) = -3, \; x_2(0) = 3, \; x_3(0) = 1$

5. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = x_1 + x_2, \;\; x_2' = -2x_1 - x_2$

(ii) $x_2' = 4x_1 + 5x_2, \;\; x_2' = -2x_1 + 6x_2$

(iii) $x_1' = x_3, \;\; x_2' = -x_3, \;\; x_3' = x_2$

(iv) $x_1' = 2x_1 + x_2 + 2x_3, \;\; x_2' = 3x_1 + 6x_3, \;\; x_3' = -4x_1 - 3x_3$

6. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X}$ (ii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

(iii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$ (iv) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

7. Να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $x_1' = -x_1 + x_2,\ x_2' = -5x_1 + 3x_2,\quad x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 0$

(ii) $x_1' = -\frac{1}{2}x_2,\ x_2' = \dfrac{5}{2}x_1 + 2x_2,\quad x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -1$

(iii) $x_1' = x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ x_2' = 2x_1 - 4x_2 + 6x_3,\quad x_3' = x_1 - 2x_2 + 3x_3,$
$x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = 0$

(iv) $x_1' = x_1 - x_3,\ x_2' = x_1 - x_2 - 2x_3,\quad x_3' = -x_1 + x_3,$
$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 3,\ x_3(0) = -1$

8. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = 3x_1 - x_2,\ x_2' = 9x_1 - 3x_2$

(ii) $x_2' = -6x_1 + 5x_2,\ x_2' = -5x_1 + 4x_2$

(iii) $x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3,\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3,\ x_3' = x_1 - x_2 + x_3$

(iv) $x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3,\ x_2' = 2x_1 + 2x_3,\ x_3' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

9. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{X}$ (ii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{X}$

(iii) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{X}$ (iv) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}$

10. Να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $x_1' = -\frac{2}{3}x_1 - x_2,\ x_2' = x_1 + \frac{4}{3}x_2,\quad x_1(0) = -3,\ x_2(0) = 4$

(ii) $x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3,\ x_2' = x_1 - x_3,\quad x_3' = x_1 - x_2,$
$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 3$

(iii) $x_1' = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3,\ x_2' = x_1 + 2x_2 - 2x_3,\ x_3' = -x_1 - x_2 + 2x_3,$
$x_1(0) = 5,\ x_2(0) = -2,\ x_3(0) = 1$

(iv) $x_1' = -2x_1 + 5x_2 + 6x_3,\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_3' = -x_1 + 2x_2 + 3x_3,$
$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1,\ x_3(0) = -1$

11. Να λυθούν οι ασκήσεις 2-4, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαγωνοποίησης του κατάλληλου πίνακα.

12. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = 5x_1 + 9x_2 + 2,\ x_2' = -x_1 + 11x_2 + 6$

(ii) $x_1' = x_1 - 4x_2 + 4t + 9\mathrm{e}^{6t},\ x_2' = 4x_1 + x_2 - t + \mathrm{e}^{6t}$

(iii) $x_1' = x_1 + 5x_2 + \sin t,\ x_2' = -x_1 + x_2 - 2\cos t$

(iv) $x_1' = x_1 + x_2 + x_3 + \mathrm{e}^{4t},\ x_2' = 2x_2 + 3x_3 - \mathrm{e}^{4t},\ x_3' = 5x_3 + 2\mathrm{e}^{4t}$

13. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = x_1 - x_2 + \mathrm{e}^t\cos t,\ x_2' = x_1 + x_2 + \mathrm{e}^t\sin t$

(ii) $x_1' = x_1 - 2x_2 + \tan t,\ x_2' = x_1 - x_2 + 1$

(iii) $x_1' = x_1 + x_2 + \mathrm{e}^t,\ x_2' = x_1 + x_2 + \mathrm{e}^{2t},\ x_3' = 3x_3 + t\mathrm{e}^{3t}$

(iv) $x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3,\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3 + t,\ x_3' = x_1 - x_2 + x_3 + 2\mathrm{e}^t$

14. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διαγωνοποίησης του κατάλληλου πίνακα, να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω συστημάτων.

(i) $x_1' = 2x_1 + 3x_2 - 7, \ \ x_2' = -x_1 - 2x_2$

(ii) $x_1' = x_1 + 3x_2 - 2t^2, \ \ x_2' = 3x_1 + x_2 + t + 5$

(iii) $x_1' = 4x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 3\mathrm{e}^t, \ \ x_2' = 9x_1 + 6x_2 + 10\mathrm{e}^t$

(iv) $x_1' = 5x_3 + 5, \ \ x_2' = 5x_2 - 10, \ \ x_3' = 5x_1 + 40$

15. Να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $x_1' = 9x_1 - 10x_2 + 9 + 3\mathrm{e}^{2t}, \ \ x_2' = 5x_1 - 6x_2 + 5 + 3\mathrm{e}^{2t},$
$x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 2$

(ii) $x_1' = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \mathrm{e}^{3t}, \ \ x_2' = -\frac{10}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - 2\mathrm{e}^{3t},$
$x_1(0) = -2, \ x_2(0) = -5$

(iii) $x_1' = 4x_1 - 6x_3 - 6 - 5\mathrm{e}^{-t}, \ \ x_2' = -2x_1 + 4x_3 + 4 + 2\mathrm{e}^{-t},$
$x_3' = 3x_1 - 5x_3 - 5 - 3\mathrm{e}^{-t}, \quad x_1(0) = 3, \ x_2(0) = 2, \ x_3(0) = -1$

(iv) $x_1' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \ \ x_2' = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 5\mathrm{e}^{2t},$
$x_3' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + 4\mathrm{e}^{2t}, \quad x_1(0) = -1, \ x_2(0) = 4, \ x_3(0) = 1$

16. Αφού βρεθεί ο εκθετικός πίνακας για τον κατάλληλο πίνακα από τα πιο κάτω συστήματα, στη συνέχεια να βρεθεί η γενική τους λύση.

(i) $x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \ \ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \ \ x_3' = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3$

(ii) $x_1' = 0, \ \ x_2' = 3x_1, \ \ x_3' = 5x_1 + x_2$