

Ασκήσεις 4

1. Ναδειχθεί ότι x, x^2, x^4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0$$

στο διάστημα $(0, \infty)$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση.

2. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

(ii) $4y''' + 4y'' - 7y' + 2y = 0$

(iii) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(iv) $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$

(v) $y^{iv} - y''' - 3y'' + y' + 12y = 0$

(vi) $y^{iv} + 6y''' + 15y'' + 20y' + 12y = 0$

3. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$

(ii) $y''' - 3y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8, \quad y''(0) = -4$

(iii) $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 6$

(iv) $y^{iv} - 3y''' + 2y'' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 2$

4. Οι ρίζες μιας χαρακτηριστικής εξίσωσης που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές τάξης 10, είναι ίσες με

$$r_1 = 4 \text{ πολλαπλότητας } 4, \quad r_2 = 2 + 3i \text{ πολλαπλότητας } 3, \quad r_3 = \dots \text{ πολλαπλότητας } 3.$$

Να δοθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

5. Αν $y(x) = e^x \sin 2x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y^{iv} + 3y''' + y'' + 13y' + 30y = 0,$$

να βρεθεί η γενική λύση.

6. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $y''' + 4y'' + y' - 6y = -18x^2 + 1$

(ii) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 9e^{2x} - 8e^{3x}$

(iii) $y''' + y' = 2x^2 + 4 \sin x$

(iv) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = xe^x - 4e^{2x} + 6e^{4x}$

(v) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 3x^2 e^x - 7e^x$

(vi) $y^{iv} + 2y''' - 3y'' = 18x^2 + 16xe^x + 4e^{3x} - 9$

7. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 3xe^x + 2e^x - \sin x, \quad y(0) = \frac{33}{40}, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$

(ii) $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 8x^2 + 3 - 6e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7, \quad y''(0) = 10$

8. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, να βρεθεί μια ειδική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $y''' - y' = -2$

(ii) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}$

(iii) $y''' + 4y' = -8(\cos 2x + \sin 2x)$

(iv) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$

9. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

(ii) $x^4 y^{iv} - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0$

(iii) $x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x$

(iv) $x^3 y''' - 8x^2 y'' + 28xy' - 40y = -\frac{9}{x}$