

## Ασκήσεις 3

1. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

(i) Ναδειχθεί ότι  $e^{2x}$  και  $e^{3x}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ .

(ii) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(iii) Να βρεθεί η ειδική λύση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ . Να εξηγηθεί γιατί η λύση είναι μοναδική και να δοθεί το διάστημα όπου ορίζεται.

2. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0.$$

(i) Ναδειχθεί ότι  $x^2$  και  $x^{-2}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα  $(0, \infty)$ .

(ii) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(iii) Να βρεθεί η ειδική λύση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες  $y(2) = 3$ ,  $y'(2) = -1$ . Να εξηγηθεί γιατί η λύση είναι μοναδική και να δοθεί το διάστημα όπου ορίζεται.

3. Για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις, δίνεται μια λύση. Αφού βρεθεί μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση, να δοθεί η γενική λύση για τη διαφορική εξίσωση.

(i)  $(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$ ,  $y = x$

(ii)  $(2x + 1)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 0$ ,  $y = e^{2x}$

(iii)  $(x^2 + x)y'' - (x^2 - 2)y' - (x + 2)y = 0$ ,  $y = e^x$

4. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i)  $2y'' + 3y' - 2y = 0$

(ii)  $4y'' - 4y' + y = 0$

(iii)  $16y'' + 32y' + 25y = 0$

(iv)  $y'' - 8y' + 16y = 0$

(v)  $y'' - 4y' + 13y = 0$

(vi)  $4y'' + y = 0$

5. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i)  $y'' - y' - 12y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 5$

(ii)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -3$

(iii)  $y'' - 4y' + 29y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 5$

(iv)  $4y'' + 4y' + 37y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -4$

6. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

(i)  $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

(ii)  $y'' + 2y' + 2y = 10 \sin 4x$

(iii)  $y'' + 2y' + 10y = 5xe^{-2x}$

(iv)  $y'' + 4y = 4 \sin 2x + 8 \cos 2x$

(v)  $y'' - 4y = 16xe^{2x}$

(vi)  $y'' + y = x \sin x$

7. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

- (i)  $y'' - 8y' + 15y = 9xe^{2x}$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y'(0) = 10$
- (ii)  $y'' + 6y' + 9y = 27e^{-6x}$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$
- (iii)  $y'' - 10y' + 29y = 8e^{5x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 8$
- (iv)  $y'' - 2y' + y = 2xe^{2x} + 6e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

8. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

- (i)  $y'' + y = \sec x$
- (ii)  $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$
- (iii)  $y'' - 2y' + y = xe^x \ln x$ ,  $x > 0$
- (iv)  $y'' + y = \tan^3 x$
- (v)  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$
- (vi)  $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{x}$

9. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τις δύο δοσμένες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

- (i)  $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$ ,  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = xe^x$
- (ii)  $(2x+1)(x+1)y'' + 2xy' - 2y = (2x+1)^2$ ,  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = (x+1)^{-1}$
- (iii)  $(\sin^2 x)y'' - (2 \sin x \cos x)y' + (\cos^2 x + 1)y = \sin^3 x$ ,  
 $y_1(x) = \sin x$ ,  $y_2(x) = x \sin x$

10. Να βρεθεί η γενική λύση για τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις.

- (i)  $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0$
- (ii)  $x^2 y'' - 3xy' + 13y = 0$
- (iii)  $9x^2 y'' + 3xy' + y = 0$
- (iv)  $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$
- (v)  $x^2 y'' + xy' + 4y = 2x \ln x$
- (vi)  $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 5x^2$

11. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

- (i)  $x^2 y'' - 2xy' - 10y = 0$ ,  $y(1) = 5$ ,  $y'(1) = 4$
- (ii)  $x^2 y'' - 2y = 4x - 8$ ,  $y(1) = 4$ ,  $y'(1) = -1$
- (iii)  $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 4x^2 - 6x^3$ ,  $y(2) = 4$ ,  $y'(2) = -1$
- (iv)  $x^2 y'' - 6y = \ln x$ ,  $y(1) = \frac{1}{6}$ ,  $y'(1) = -\frac{1}{6}$

12. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x+2)^2 y'' - (x+2)y' - 3y = 0.$$