Ασκήσεις 2

1. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

   (i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{(\mathrm{e}^y+1)^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^y} = 0$ (ii) $(y - yx^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)^2$

   (iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x(\cos 2y - \cos^2 y)$

   (v) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{1-y^2}$ (vi) $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$

2. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

   (i) $y(x^2+3x+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x+4)(y^2+1) = 0$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2xy+3y^2}{2xy+x^2}$

   (iii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\tan\dfrac{y}{x} + y$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

   (i) $(1+2x)y' = 3+y, \quad y(0) = -2$

   (ii) $y' = 2x\sec y, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}$

   (iii) $(y^4+2y)y' = x\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = -1$

   (iv) $y' = (x-3)(y^2+1), \quad y(0) = 1$

4. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

   (i) $(y-2x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x = 0$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2+xy}{x^2}$

   (iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y-x}{y+x}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$

5. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

   (i) $(x^2+2xy)y' = 2(xy+y^2), \quad y(1) = 2$

   (ii) $xy' = 3y - x, \quad y(1) = 1$

   (iii) $xy^2y' = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$

   (iv) $x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}y' - (x + y\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}) = 0, \quad y(1) = 0$

6. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

   (i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ (ii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2x+1}{x+1}y = x-1$

   (iii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy + y - 1 = 0$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \cos x$

   (v) $(1+\sin x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x - y\cos x$ (vi) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 3x^2\mathrm{e}^{-3x}$

7. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

   (i) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8$

   (ii) $(\mathrm{e}^x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^x[y - 3(\mathrm{e}^x+1)^2] = 0, \quad y(0) = 4$

   (iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 1$

   (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \sin 2x, \quad y(0) = 0$

8. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x+1}{2x}y = \dfrac{x+1}{xy}$

(iii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \dfrac{1}{y^2}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^4 - y$

9. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2$

(ii) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = (xy)^{\frac{3}{2}}, \quad y(1) = 4$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = -y^3, \quad y(0) = 1$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y + 6\mathrm{e}^x y^{\frac{3}{2}} = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}$

10. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων Riccati, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη λύση.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x, \quad y_1(x) = 1$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + xy + 1, \quad y_1(x) = x$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1), \quad y_1(x) = x$

11. Αφού βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων Riccati, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη λύση, στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} - \left(\dfrac{4}{x} + 3\right) y + 2y^2, \quad y_1(x) = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = \dfrac{5}{2}$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4} + 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) y - \dfrac{y^2}{x^2}, \quad y_1(x) = -\dfrac{1}{x}, \quad y(1) = -\dfrac{1}{2}$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2 - 4\cos x + 4\sin x + (4\cos x - 4\sin x - 1)y + (\sin x - \cos x)y^2,$
$y_1(x) = 2, \quad y(0) = 3$

12. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς και στην συνέχεια να λυθούν.

(i) $(2xy+1)\mathrm{d}x + (x^2+4y)\mathrm{d}y$

(ii) $(6xy + 2y^2 - 5)\mathrm{d}x + (3x^2 + 4xy - 6)\mathrm{d}y = 0$

(iii) $(y^2+1)\cos x \mathrm{d}x + 2y \sin y \mathrm{d}y = 0$

(iv) $(y\sec^2 x + \sec x \tan x)\mathrm{d}x + (\tan x + 2y)\mathrm{d}y = 0$

13. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)\mathrm{d}x + (2x^3y - 3xy^2 + 1)\mathrm{d}y = 0, \quad y(-2) = 1$

(ii) $(2y\sin x\cos x + y^2\sin x)\mathrm{d}x + (\sin^2 x - 2y\cos x)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 3$

(iii) $(y\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + y^2)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + 2xy)\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = 6$

(iv) $\dfrac{1 + 8xy^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x + \dfrac{2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}y, \quad y(1) = 8$

14. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(4x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$$

δεν είναι ακριβής. Αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής x^n, όπου n είναι θετικός ακέραιος, να λυθεί η διαφορική εξίσωση.

15. Αφού βρεθεί ο κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(5xy+4y^2+1)\mathrm{d}x+(x^2+2xy)\mathrm{d}y=0$

(ii) $(2x+\tan y)\mathrm{d}x+(x-x^2\tan y)\mathrm{d}y=0$

(iii) $(xy^2+y^2+y)\mathrm{d}x+(2xy+1)\mathrm{d}y=0$

(iv) $(2xy^2+y)\mathrm{d}x+(2y^3-x)\mathrm{d}y=0$

16. Αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $x^m y^n$, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(4xy^2+6y)\mathrm{d}x+(5x^2y+8x)\mathrm{d}y=0$

(ii) $(8x^2y^3-2y^4)\mathrm{d}x+(5x^3y^2-8xy^3)\mathrm{d}y=0$

17. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(2x+y+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5x+2y+1=0$

(ii) $(6x-2y-3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x-y+1$

(iii) $(2x+y-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x+2y+3$

(iv) $(x+5y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10x-4y+12$

18. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών.

(i) $(x+y+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3x+y+6,\quad y(2)=-2$

(ii) $(4x+6y+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2x+3y+1=0,\quad y(-2)=2$

19. Αφού λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις ως προς y ή ως προς x, στη συνέχεια να βρεθεί η γενική τους λύση.

(i) $xy'^3-yy'^2+1=0$

(ii) $x(y'^2-1)=2y'$

(iii) $y=2xy'+y^2y'^3$

(iv) $2xy'-y=y'\ln(yy')$

(v) $y+xy'=4\sqrt{y'}$

20. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=\ln y$, να μετασχηματιστεί η μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'+P(x)y=Q(x)y\ln y$$

σε γραμμική.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy'-4x^2y+2y\ln y=0.$$

21. Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη αντικατάσταση, να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις.

(i) $(2x\sin y\cos y)y' = 4x^2 + \sin^2 y, \quad u = \sin y$

(ii) $(x + \mathrm{e}^y)y' = x\mathrm{e}^{-y} - 1, \quad u = \mathrm{e}^y$

(iii) $(3xy)^2 + x^{\frac{3}{2}}y' = y^2, \quad u = \dfrac{1}{y}$

(iv) $y' = 3y^2 - \dfrac{8}{x}y + \dfrac{4}{x^2}, \quad y = \dfrac{1}{x} + u$

(v) $yy'' + {y'}^2 = yy', \quad u = y'$

22. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x}{y} + 2 = 0$

(ii) $(3 + 2x + 4y)y' = 1 + x + 2y$

(iii) $y(2x - y + 2)\mathrm{d}x + 2(x - y)\mathrm{d}y = 0$

(iv) $(1 + x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x(1 + x)^2$

(v) $xyy' + y^2 - \sin x = 0$

(vi) $5y + {y'}^2 = x(x + y')$

23. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές για τις πιο κάτω οικογένειες καμπυλών.

(i) $y = cx^3$

(ii) $y = \mathrm{e}^{cx}$

(iii) $y = \dfrac{cx^2}{x + 1}$

(iv) $x^2 = 2y - 1 + c\mathrm{e}^{-2y}$

(v) $x^2 - y^2 = cx^3$

24. (i) Να βρεθεί η οικογένεια των πλάγιων τροχιών που τέμνει την οικογένεια των παραβολών $y^2 = cx$ σε μια γωνία $\frac{\pi}{3}$.

(ii) Να βρεθεί η οικογένεια των πλάγιων τροχιών που τέμνει την οικογένεια των καμπυλών $x+y = cx^2$ σε μια γωνία ίση με $\tan^{-1} 2$.