

Ασκήσεις 1

1. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = x \cos(\ln x)$ και $y_2(x) = x \sin(\ln x)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0.$$

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \sqrt{\frac{5}{2 \cos x + 4 \sin x + 10e^{2x}}}$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + y - y^3 \sin x = 0.$$

3. Να δειχθεί ότι η δοσμένη συνάρτηση $y(x)$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy} = 0, \quad c_1(x + y)^2 = x e^{\frac{y}{x}}$$

$$(ii) \quad y'' + y = \tan x, \quad y(x) = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

$$(iii) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(x) = x^2 + x^2 \ln x, \quad x > 0$$

$$(iv) \quad x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 12x^2, \quad y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + 4x^2, \quad x > 0$$

4. Αν $y(x) = a + bx + cx^2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^3 y''' + x^2 y'' - y = x^2 + 2x + 1,$$

να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a , b και c .

5. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων

$$(i) \quad \sqrt{x} y' = x^6 + 5x$$

$$(ii) \quad e^x y' = 5$$

$$(iii) \quad y'' + 6x^2 - 2 = 0$$

$$(iv) \quad xy' + y = 4x^3 + 2x$$

6. Για τα πιο κάτω προβλήματα αρχικών τιμών να δειχθεί ότι η δοσμένη συνάρτηση $y(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης. Στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

$$(i) \quad y' + 3x^2 y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y(x) = c e^{-x^3}$$

$$(ii) \quad y' + y \tan x = \cos x, \quad y(\pi) = 0, \quad y(x) = (x + c) \cos x$$

$$(iii) \quad y' = 3x^2(y^2 + 1), \quad y(0) = 1, \quad y(x) = \tan(x^3 + c)$$

$$(iv) \quad xy' + 3y = 2x^5, \quad y(2) = 1, \quad y(x) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{c}{x^3}$$

7. (i) Ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης

$$\mathbf{F} = m(2e^{-t}\mathbf{i} + 5 \cos t\mathbf{j} - 3 \sin t\mathbf{k}),$$

όπου m η μάζα του σωματιδίου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ με ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_0 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Να βρεθούν η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

- (ii) Ένα σωματίδιο με μάζα ίση με 2 μονάδες, κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης

$$\mathbf{F} = 24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ με ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_0 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Να βρεθούν η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.