**3.1** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$:

(i) $f(x,y) = \sin^{-1}(x+y)$ (ii) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{y^2+3}$

(iii) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ (iv) $f(x,y,z) = z + \ln(1-x^2-y^2)$

**3.2** (i) Έστω $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1,-2,0) (β) (1,0,3) (γ) (0,0,0)

(ii) Έστω $f(x,y,z) = xyz+3$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1,0,2) (β) (-2,4,1) (γ) (0,0,0)

**3.3** Να βρεθεί η περιοχή όπου η $f$ είναι συνεχής.

(i) $f(x,y,z) = 3x^2 e^{yz}\cos(xyz)$ (ii) $f(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2)$

(iii) $f(x,y,z) = \frac{y+1}{x^2+y^2-1}$ (iv) $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+3z^2}$

**3.4** Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2y^3)$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$

**3.5** Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}\right]$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+(y-1)^2}\right]$

**3.6** Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

**3.7** Να βρεθούν οι $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ για τις πιο κάτω συναρτήσεις

(i) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ (ii) $f(x,y) = x^3 e^{-y} + y^3\sec\sqrt{x}$

(iii) $f(x,y) = (y^2\tan x)^{-\frac{4}{3}}$ (iv) $f(x,y) = \cosh(\sqrt{x})\sinh^2(xy^2)$

**3.8** Χρησιμοποιώντας πλεγμένη παραγώγιση, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(i) $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$ (ii) $x^2 + z\sin(xyz) = 0$

**3.9** Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(i) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^y \sin x$

(ii) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

(iii) $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

**3.10** Να βρεθεί η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(-1, 1, 5)$ της καμπύλης η οποία είναι η τομή της επιφάνειας $z = x^2 + 4y^2$ και

(i) του επιπέδου $x = -1$ (ii) του επιπέδου $y = 1$

**3.11** Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν, αλλά η $f$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

**3.12** Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

(i) $z = 3x^2y^3, \quad x = t^4, \ y = t^2$

(ii) $z = \ln(2x^2 + y), \quad x = \sqrt{t}, \ y = t^{\frac{2}{3}}$

(iii) $z = 3\cos x - \sin xy, \quad x = \frac{1}{t}, \ y = 3t$

(iv) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}, \quad x = \ln t, \ y = t$

**3.13** Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$

(i) $z = 3x - 2y, \quad x = u + v\ln u, \ y = u^2 - v\ln v$

(ii) $z = \mathrm{e}^{x^2 y}, \quad x = \sqrt{uv}, \ y = \frac{1}{v}$

(iii) $z = \cos x \sin y, \quad x = u - v, \ y = u^2 + v^2$

(iv) $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), \quad x = \mathrm{e}^u \sin v, \ y = \mathrm{e}^u \cos v$

**3.14** (i) Έστω $z = \mathrm{e}^x f(x - y)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

(ii) Έστω $z = f(y + cx) + g(y - cx)$, όπου $c \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

**3.15** Χρησιμοποιώντας ολικό διαφορικό, να βρεθεί κατά προσέγγιση η αλλαγή της $f(x,y)$ όταν $(x,y)$ αλλάζει από το $P$ στο $Q$.

(i) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}, \quad P(-1,-2), \ Q(-1.02, -2.04)$

(ii) $f(x,y) = \ln\sqrt{1 + xy}, \quad P(0,2), \ Q(-0.09, 1.98)$

**3.16** Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία.

(i) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$

(ii) $f(x, y) = x^2 + y - \mathrm{e}^y$

(iii) $f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$

(iv) $f(x, y) = y \sin x$

**3.17** Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στο δοσμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο $R$.

(i) $f(x, y) = xy - x - 3y$ και P είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,4) και (5,0).

(ii) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ και P είναι η τετραγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,2), (2,2) και (2,0).

(iii) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ και P είναι η κυκλική περιοχή $x^2 + y^2 \leq 4$.

**3.18** (i) Να βρεθούν όλα τα σημεία πάνω στο επίπεδο $x + y + z = 5$ στο πρώτο οκτημόριο για τα οποία η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy^2z^2$ έχει μέγιστη τιμή.

(ii) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $x^2 - yz = 5$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

**3.19** (i) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t$ και $x = 2t,\ y = 2t + 3,\ z = 2t$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(-1, 3, 2)$ από το επίπεδο $x - 2y + z = 4$.

**3.20** Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να βρεθούν τα ακρότατα της $f$ υποκείμενη στις δοσμένες συνθήκες. Επίσης να βρεθούν τα σημεία στα οποία συμβαίνουν οι τα ακρότατα.

(i) $f(x, y) = xy, \quad 4x^2 + 8y^2 = 16$

(ii) $f(x, y) = x^2 - y, \quad x^2 + y^2 = 25$

(iii) $f(x, y, z) = 3x + 6y + 2z, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$

(iv) $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**3.21** Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα.

(i) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας $y = 2x + 3$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο (4,2).

(ii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x + 2y + z = 1$ το οποίο είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

(iii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $4x + 3y + z = 2$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο (1,-1,1).

(iv) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $xy - z^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

**3.22** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από την επιφάνεια $z = x^2$ και τα επίπεδα $x = 2,\ y = 3,\ y = 0$ και $z = 0$.

**3.23** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R x \cos(xy) \cos^2 \pi x \, \mathrm{d}A$$

όπου $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq \pi\}$.

**3.24** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}A,$$

όπου $R$ είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$.

**3.25** Να βρεθεί όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 3 - x$.

**3.26** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που είναι φραγμένο από πάνω από την επιφάνεια $z = 1 - x^2 - y^2$ και από κάτω από το $xy$-επίπεδο.

**3.27** Αφού γίνει αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_0^1 \int_{4x}^4 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**3.28** Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(ii) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \quad a > 0$

(iii) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

**3.29** (i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r = 4\sin\theta$ και εκτός της $r = 2$.

(ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής εντός της $r = 1$ και εκτός της $r = 1 + \cos\theta$.

**3.30** Χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα να υπολογιστεί το

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$