

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(i) (4+i)(3+2i)(1-i) \quad (ii) \frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$$

$$(iii) (2i-1)^2 \left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} \right) \quad (iv) 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3$$

2. Αν $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 4i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2i$, να υπολογιστούν:

$$(i) \overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)} \quad (ii) |z_1^2 + z_2^2|^2 + |\bar{z}_3^2 - z_2^2|^2$$

$$(iii) \operatorname{Re}\{2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2\} \quad (iv) \operatorname{Im} \left\{ \frac{z_1 z_2}{z_3} \right\}$$

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε

$$2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i.$$

4. Να εκφραστούν σε εκθετική μορφή: (i) $2 + i$ (ii) $-3 - 4i$ (iii) $1 - 2i$

5. Να δειχθεί ότι $\frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta$.

6. Να δειχθεί ότι $\cos 4\theta = 8 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1$.

7. Να λυθεί η εξίσωση $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$.

8. Να δειχθεί ότι

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = 1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \dots$$

$$e^{\cos x} \sin(\sin x) = \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \frac{\sin 3x}{3!} + \dots$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) dx.$$

9. Να υπολογιστεί η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{2^n}$.

10. Να βρεθεί η καμπύλη που αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση $|z + 1| = |z - i|$.

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{(\cos \frac{1}{7}\pi - i \sin \frac{1}{7}\pi)^3}{(\cos \frac{1}{7}\pi + i \sin \frac{1}{7}\pi)^4}.$$

12. Να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του

$$\frac{[\sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)]^4}{\cos 2\theta - i \sin 2\theta}.$$

13. Αν $z = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, να εκφραστούν οι μιγαδικοί αριθμοί z^4 και z^5 στη μορφή $a + ib$.
14. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των (i) $2i$ (ii) $1 - i\sqrt{3}$.
15. Να υπολογιστούν: (i) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $(-8 - i8\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$.
16. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n$ είναι πραγματικός. Να βρεθεί η τιμή του όταν $n = 12$.
17. Αφού βρεθεί η έβδομη ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = -1$, να δειχθεί ότι

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

18. Αν $z = \cos \theta + i \sin \theta$, αναπτύσσοντας τη $(z + \frac{1}{z})^5 (z - \frac{1}{z})^5$, να δειχθεί ότι

$$\sin^5 \theta \cos^5 \theta = \frac{1}{2^9}(\sin 10\theta - 5 \sin 6\theta + 10 \sin 2\theta).$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^5 \theta d\theta.$$

19. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^c e^{ax} \cos bxdx, \quad \int_0^c e^{ax} \sin bxdx,$$

όπου a , b και c είναι σταθερές.

20. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

(i) $1 + \cos \phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + \dots + \cos n\phi$

(ii) $\sin \phi + \sin 2\phi + \sin 3\phi + \dots + \sin n\phi$