1. Να δειχθεί ότι η τρι-παραμετρική οικογένεια των κύκλων

$$x^2 + y^2 + 2c_1 x + 2c_2 y + c_3 = 0$$

είναι η γενική λύση της διαφορικής

$$\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 = 0.$$

2. Να κατασκευαστεί η διαφορική εξίσωση η οποία ικανοποιείται από τις πιο κάτω συναρτήσεις.

$$\text{(i) } y = c_1 x^2 + c_2 x^3 \qquad \text{(ii) } cy^2 + x^2 y^3 = 0$$

3. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων

$$\text{(i) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \qquad \text{(ii) } \sqrt{1+x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x(1+y) = 0$$

$$\text{(iii) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - y + x^2 - yx^2 \qquad \text{(iv) } \cos^2 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \sin x \mathrm{e}^{-y} = 0$$

4. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων

$$\text{(i) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \qquad \text{(ii) } x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \sqrt{x^2 + y^2},\ x > 0$$

$$\text{(iii) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x - 2y}{2x - y} \qquad \text{(iv) } xy^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^3 - 2x^3$$

5. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων

$$\text{(i) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = \mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{(ii) } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \cos(\mathrm{e}^x)$$

$$\text{(iii) } \cosh x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sinh xy = \cosh^2 x \qquad \text{(iv) } x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x^2 \cos x$$

6. **(i)** Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης η οποία διέρχεται από το σημείο $(0,2)$ και έχει κλίση ίση με $x\mathrm{e}^y$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης η οποία διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y \tan x = 2\sin^2 x \cos x.$$

7. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\text{(i) } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0 \qquad \text{(ii) } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

$$\text{(iii) } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 9y = 0 \qquad \text{(iv) } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 13y = 0$$

8. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

9. Να βρεθεί η ειδική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων οι οποίες ικανοποιούν τις δοσμένες συνθήκες.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 0 \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 7y = 0 \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 3$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 0 \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 0$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 13y = 0 \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$

10. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = \sin x$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 9y = x^2 + 3x$

(v) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = \sin x \cos x$ (vi) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = \cos^2 x - \sin^2 x$

11. Έστω ότι $y_1(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = f_1(x)$$

και έστω ότι $y_2(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = f_2(x).$$

Να δειχθεί ότι η $y_1(x) + y_2(x)$ είναι λύση της

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y = 1 + \mathrm{e}^x$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = 1 + x + \sin x$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \sinh x$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = 12\cos^2 x$

12. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = \tan x$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 3\sin^2 x$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = \csc x$

(v) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = \sec x \tan x$ (vi) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

(vii) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = x\mathrm{e}^{-x}$ (viii) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = \sec^2 x$

13. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 6x + \sin x.$$

14. Να απλοποιηθεί η διαφορική εξίσωση του Bernoulli

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$$

στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

με τη χρήση του μετασχηματισμού $u = y^{1-n}$.

15. Να λυθούν οι πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι σε μορφή Bernoulli.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x}y = y^3$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 2x\sqrt{y}$

16. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b έτσι ώστε η συνάρτηση $y = a\mathrm{e}^{bx}$ να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-x}y^2 - y - \mathrm{e}^x = 0.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί γενική της λύση.

17. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων που είναι σε μορφή Euler, όπου $x > 0$.

(i) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$ (ii) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 0$

(iii) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6y = 0$ (iv) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = \cos(\ln x)$

18. Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων.

(i) $e^{2x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x}+1)$ (ii) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

(iii) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = 1$ (iv) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^x$

19. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

20. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x\sec^2 y\frac{dy}{dx} + \tan y = x^2.$$