

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1

- 2** (i) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ (ii) $xy' + 2y = 0$
- 3** (i) $y = cx$ (ii) $y = ce^{-\sqrt{1+x^2}} - 1$ (iii) $y = 1 - ce^{-x - \frac{1}{3}x^3}$ (iv) $y = \ln(\sec x + c)$
- 4** (i) $\ln|x| - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = c$ (ii) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$ (iii) $y^2 - 4xy + x^2 = c$ (iv) $y^3 = x^3(c - 6 \ln x)$
- 5** (i) $y = e^{-2x} + ce^{-3x}$ (ii) $y = e^{-x} \sin(e^x) + ce^{-x}$ (iii) $y = \frac{1}{2} \sinh x + \frac{1}{2} x \operatorname{sech} x + c \operatorname{sech} x$
(iv) $y = cx + x \sin x$
- 6** (i) $y = -\ln(3 - \frac{1}{2}x^2)$ (ii) $y = x \cos x - \sin x \cos^2 x + \cos x$
- 7** (i) $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$ (ii) $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$ (iii) $y = (A + Bx)e^{3x}$
(iv) $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$
- 8** $y = (A + Bx)e^x + Ce^{-x}$
- 9** (i) $y = 2e^x - e^{-3x}$ (ii) $y = 4e^{-x} + e^{7x}$ (iii) $y = -e^{-2x}(3 \cos x + 6 \sin x)$
(iv) $e^{3x}(2 \sin 2x - \cos 2x)$
- 10** (i) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x$ (ii) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$
(iii) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x e^{2x}$ (iv) $e^{-2x}(c_1 \cos \sqrt{5}x + c_2 \sin \sqrt{5}x) + \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}$
(v) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{8}x \cos 2x$ (vi) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \sin 2x$
- 11** (i) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 + \frac{1}{2}x e^x$ (ii) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3} \sin x$
(iii) $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{4}x^2 e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$ (iv) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 6 - 2 \cos 2x$
- 12** (i) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$ (ii) $y = (c_1 + c_2x)e^x + x e^x \ln |x|$
(iii) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 3 \cos^2 x - \cos^4 x + \sin^4 x$
(iv) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$
(v) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x - \sin x \ln |\cos x|$ (vi) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} - e^{-x} \ln |x|$
(vii) $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + (x-2)e^{-x}$ (viii) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 1 + \sin x \ln |\sec x + \tan x|$
- 13** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 3x + \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{10} \cos x$
- 15** (i) $y = \left(\frac{c}{x^2} - \frac{2}{3}x\right)^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $y = \left(ce^{\frac{x^2}{2}} - 1\right)^2$
- 16** $a = \pm 1, b = 1, y = e^x + \frac{2}{2ce^x - e^{-x}}$
- 17** (i) $y = \frac{1}{x}(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x))$ (ii) $y = c_1 x^{1+\sqrt{3}} + c_2 x^{1-\sqrt{3}}$ (iii) $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^3}$
(iv) $y = x(c_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)) + \frac{3}{13} \cos(\ln x) - \frac{2}{13} \sin(\ln x)$
- 18** (i) $y = e^{2x} + e^{-2x} + c_1 x + c_2$ (ii) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3$ (iii) $y = \frac{1}{2}(\ln c_1 x)^2 + c_2$
(iv) $y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 e^x$
- 19** $y = (c_1 x + c_2)^2$
- 20** $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\right)$

Κεφάλαιο 2

1 (i) $21 + i$ (ii) $-\frac{15}{2} + 5i$ (iii) $-\frac{11}{2} - \frac{23}{2}i$ (iv) $-3 - 3i$

2 (i) $-7 + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ (ii) $765 + 128\sqrt{3}$ (iii) -35 (iv) $\frac{6\sqrt{3}+4}{7}$

3 $x = 1, y = -2$

4 (i) $\sqrt{5}e^{i \tan^{-1}(1/2)}$ (ii) $5e^{i[\pi + \tan^{-1}(4/3)]}$ (iii) $\sqrt{5}e^{-i \tan^{-1} 2}$

7 $1, 1, 2, -1 \pm i$

8 π

9 $\frac{4-2 \cos \theta}{5-4 \cos \theta}$

10 $y + x = 0$

11 -1

12 $9, 6\theta$

13 $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$

14 (i) $\pm(1 + i)$ (ii) $\pm \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$

15 (i) $\pm\sqrt{2}(1 + i), \pm\sqrt{2}(1 - i)$ (ii) $\pm(\sqrt{3} - i), \pm(1 + i\sqrt{3})$

16 2^{13}

18 $\frac{1}{60}$

19 $\frac{e^{ac}(a \cos bc + b \sin bc) - a}{a^2 + b^2}, \frac{e^{ac}(a \sin bc + b \cos bc) + b}{a^2 + b^2}$

20 (i) $\frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\phi]}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$ (ii) $\frac{1}{2} \cot \frac{\phi}{2} - \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\phi]}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$

Κεφάλαιο 3**3.1** (i) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών $y = 1 - x$ και $y = -1 - x$.(ii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών $x = \pm 2$.(iii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.(iv) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

3.2 (i) (α) $x^2 + y^2 - z = 5$, (β) $x^2 + y^2 - z = -2$, (γ) $x^2 + y^2 - z = 0$

(ii) (α) $xyz = 0$, (β) $xyz = -8$, (γ) $xyz = 0$

3.3 (i) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .

(ii) όλα τα σημεία μέσα στην σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 2.

(iii) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 , εκτός αυτά που βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.(iv) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .**3.4** (i) 0(ii) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)

(iii) 1

(iv) Δεν υπάρχει

(v) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)

(vi) 0

3.5 (i) $\frac{\pi}{2}$

(ii) $-\frac{\pi}{2}$

3.7 (i) $f_x(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{y^2+x^2}$, $f_y(x, y) = -\frac{xy^{-\frac{3}{2}}}{y^2+x^2} - \frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(ii) $f_x(x, y) = 3x^2e^{-y} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^3 \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$, $f_y(x, y) = -x^3e^{-y} + 3y^2 \sec \sqrt{x}$

(iii) $f_x(x, y) = -\frac{4}{3}y^2 \sec^2 x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$, $f_y(x, y) = \frac{8}{3}y \tan x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$

(iv) $f_x(x, y) = 2y^2 \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sinh \sqrt{x} \sinh^2(xy^2)$, $f_y(x, y) = 4xy \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2)$

3.8 (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+yz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz)+\sin(xyz)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz)+\sin(xyz)}$

3.10 (i) 8 (ii) -2

3.12 (i) $42t^{13}$

(ii) $\frac{2(3+t^{-\frac{1}{3}})}{3(2t+t^{\frac{2}{3}})}$

(iii) $3t^{-2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$

(iv) $\frac{1-2t^4-8t^4 \ln t}{2t\sqrt{1+\ln t-2t^4 \ln t}}$

3.13 (i) $\frac{\partial z}{\partial u} = 3 + 3\frac{v}{u} - 4u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2 + 3 \ln u + 2 \ln v$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial u} = e^u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

(iii) $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2u \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$,

$\frac{\partial z}{\partial v} = \sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2v \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$

(iv) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2e^{2u}}{1+e^{4u}}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

3.15 (i) $df = 0.03$

(ii) $df = -0.09$

3.16 (i) Σταγματικό σημείο: (0,0), σχετικά ελάχιστα: (-1,-1), (1,1)

(ii) Σταγματικό σημείο: (0,0)

(iii) Σταγματικά σημεία: (0,0), (0,-2), (4,0), σχετικό ελάχιστο: $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

(iv) Σταγματικά σημεία: $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3.17 (i) Απόλυτο μέγιστο =0, απόλυτο ελάχιστο =-12

(ii) Απόλυτο μέγιστο =3, απόλυτο ελάχιστο =-1

(iii) Απόλυτο μέγιστο = $\frac{33}{4}$, απόλυτο ελάχιστο =- $\frac{1}{4}$

3.18 (i) (1, 2, 2)

(ii) $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$

3.19 (i) $\sqrt{6}$

(ii) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

3.20 (i) Μέγιστο $\sqrt{2}$ στα σημεία $(-\sqrt{2}, -1)$ και $(\sqrt{2}, 1)$, ελάχιστο $-\sqrt{2}$ στα σημεία $(-\sqrt{2}, 1)$ και $(\sqrt{2}, -1)$

(ii) Μέγιστο $\frac{101}{4}$ στα σημεία $(\pm\frac{\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2})$, ελάχιστο -5 στο σημείο $(0, 5)$

(iii) Μέγιστο 35 στο σημείο $(3, 3, 4)$, ελάχιστο -35 στο σημείο $(-3, -3, -4)$

(iv) Μέγιστο $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

ελάχιστο $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

3.21 (i) $(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$

(ii) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

(iii) $(1, -1, 1)$

(iv) $(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$

3.22 8

3.23 $\frac{1}{3\pi}$

3.24 $\frac{\pi}{4} - \ln 2$

3.25 27π

3.26 $\frac{\pi}{2}$

3.27 (i) $\frac{1}{8}(1 - e^{-16})$, (ii) $\sin 1$

3.28 (i) $\frac{\pi}{4} \sin 1$, (ii) $\frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}})$, (iii) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5} - 1)$

3.29 (i) $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, (ii) $2 - \frac{\pi}{4}$

3.30 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$