Ασκήσεις 7

7.1 Για τους πιο κάτω πίνακες να βρεθούν (α) οι ιδιοτιμές και (β) βάσεις για τους ιδιόχωρους.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(vi)} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7.2 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^9$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7.3 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^{25}$ και οι βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.4 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι. Αν είναι, να βρεθεί μια διαγωνοποίηση.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(vi)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.5 (i) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{A}^{49}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & -12 \\ 13 & -6 & -16 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$.

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{A}^{10}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -12 \\ 10 & 16 & -22 \\ 8 & 12 & -16 \end{bmatrix}$.

7.6 Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ διαγωνοποιήσιμος πίνακας, τότε να δειχθεί ότι υπάρχει πίνακας $\mathbf{B}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{B}^3 = \mathbf{A}$.

Να βρεθεί πίνακας $\mathbf{A}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 15 & -14 & -14 \\ -13 & 16 & 17 \\ 20 & -22 & -23 \end{bmatrix}$.

7.7 Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{P}$ ο οποίος διαγωνοποιεί ορθογώνια τον πίνακα $\mathbf{A}$ και να υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

(i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ (ii) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}$

7.8 Αν $\mathbf{v}$ είναι ένας $n \times 1$ πίνακας και $\mathbf{I}$ είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας, τότε να δειχθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$ είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.

Να βρεθεί πίνακας $\mathbf{P}$ ο οποίος διαγωνοποιεί ορθογώνια τον πίνακα $\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$, όπου $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.