Ασκήσεις 5

5.1 Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, να δειχθεί ότι ισχύει ο νόμος της απαλοιφής:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

5.2 Να δειχθεί ότι το σύνολο W το οποίο αποτελείται από διανύσματα της μορφής $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, όπου $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

5.3 Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, -1, 0),\ \mathbf{v} = (1, 3, -1)$ και $\mathbf{w} = (5, 3, -2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5.4 Να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -2, 5)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{e}_2 = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{e}_3 = (2, -1, 1)$.

5.5 Να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u} = (2, -5, 3)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1 = (1, -3, 2),\ \mathbf{e}_2 = (2, -4, -1)$ και $\mathbf{e}_3 = (1, -5, 7)$.

5.6 Να βρεθεί η τιμή του k για την οποία το διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -2, k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$ και $\mathbf{w} = (2, -1, -5)$.

5.7 Έστω τα διανύσματα

$$u_1 = x - 1,\ \ u_2 = x^2 + 2x,\ \ u_3 = x^2 + 2$$

του διανυσματικού χώρου P_2 (σύνολο των πραγματικών πολυώνυμων μέχρι και δεύτερου βαθμού). Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα (α) $\mathbf{v} = x^2 - 3x + 5$ και (β) $\mathbf{w} = x^2 - 2x - 2$ μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $u_1,\ u_2$ και u_3.

5.8 Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$u_1 = x - 1,\ \ u_2 = x^2 + 2x,\ \ u_3 = x^2 + 2$$

του διανυσματικού χώρου P_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5.9 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(i) $\mathbf{u} = (3, 4),\ \mathbf{v} = (1, -3)$

(ii) $\mathbf{u} = (4, 3, -2),\ \mathbf{v} = (2, -6, 7)$

(iii) $\mathbf{u} = (2, -3),\ \mathbf{v} = (6, -9)$

(iv) $\mathbf{u} = (-4, 6, -2),\ \mathbf{v} = (2, -3, 1)$

5.10 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(i) $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 1),\ \mathbf{u}_2 = (2, 1, -1),\ \mathbf{u}_3(7, -4, 1)$

(ii) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3),\ \mathbf{u}_2 = (1, -3, 2),\ \mathbf{u}_3(2, -1, 5),\ \mathbf{u}_4(1, 1, 1)$

(iii) $\mathbf{u}_1 = (2, -3, 7),\ \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0),\ \mathbf{u}_3 = (3, -1, 4)$

5.11 Έστω ότι W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = (2, -1, 2, 1),\ u_2 = (1, -2, 0, 3),\ u_3 = (3, 1, 0, -2)$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι μια βάση του W. Να δοθεί η διάσταση του W.

5.12 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^3$:

(i) $(1, 1, 1),\ (1, -1, 5)$

(ii) $(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (2, -1, 1)$

(iii) $(1, 2, 3),\ (1, 0, -1),\ (3, -1, 0),\ (2, 1, -2)$

(iv) $(1, 1, 2),\ (1, 2, 5),\ (5, 3, 4)$

5.13 Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε

(i) τα διανύσματα $(1, 1)$ και $(-1, k)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$

(ii) τα διανύσματα $(1, 0, 0),\ (1, 1, 1)$ και $(0, -1, k)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$

5.14 Έστω ότι W είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $f = \sin x$ και $g = \cos x$.

(i) Να δειχθεί ότι $f_1 = \sin(x + \theta)$ και $g_1 = \cos(x + \theta)$ είναι διανύσματα του W για όλες τις τιμές του θ.

(ii) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f_1 και g_1 αποτελούν μια βάση του W.

5.15 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω πίνακες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix},\ \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \text{(iii)} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},\ \text{(iv)} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

5.16 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.17 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου

$$p = x^2 - 3x + 4$$

ως προς τη βάση

$$p_1 = 1,\ \ p_2 = x,\ \ p_3 = x^2.$$

5.18 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου

$$p = x^2 - x + 2$$

ως προς τη βάση

$$p_1 = 1 + x, \quad p_2 = 1 + x^2, \quad p_3 = x + x^2.$$

5.19 Να βρεθεί μια βάση για το μηδενόχωρο του πίνακα $\mathbf{A}$.

$$\text{(i) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ii) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

5.20 Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα πιο κάτω διανύσματα.

(i) $(1, 1, -4, -3),\ (2, 0, 2, -2),\ (2, -1, 3, 2)$

(ii) $(-1, 1, -2, 0),\ (3, 3, 6, 0),\ (9, 0, 0, 3)$

(iii) $(1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-2, 0, 2, 2),\ (0, -3, 0, 3)$

5.21 Να βρεθεί ένα υποσύνολο των δοσμένων διανυσμάτων το οποίο σχηματίζει μια βάση του χώρου που παράγεται από αυτά τα διανύσματα. Στη συνέχεια να εκφραστούν τα διανύσματα που δεν βρίσκονται στη βάση ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων της βάσης.

(i) $(1, 0, 1, 1),\ (-3, 3, 7, 1),\ (-1, 3, 9, 3),\ (-5, 3, 5, -1)$

(ii) $(1, -2, 0, 3),\ (2, -4, 0, 6),\ (-1, 1, 2, 0),\ (0, -1, 2, 3)$

(iii) $(1, -1, 5, 2),\ (-2, 3, 1, 0),\ (4, -5, 9, 4),\ (0, 4, 2, -3),\ (-7, 18, 2, -8)$

5.22 Να βρεθεί ο βαθμός και η μηδενικότητα για τους πιο κάτω πίνακες.

$$\text{(i) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(ii) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 11 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(iii) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$