Ασκήσεις 4

4.1 Να υπολογιστούν τα εξής:
(i) $(1, -2, 0) + (-2, 3, 4)$
(ii) $(1, -2, 0, 3) + (4, -3, -2, 0)$
(iii) $(1, -1) + (-1, 1)$
(iv) $(1, -1, 2) + (1, 0, 1, 0)$
(v) $(1, -2, 3) - 2(1, -1, -2)$
(vi) $-3(1, -2, 1, 0)$
(vii) $3(1, -1, 2) - (1, -2, 1)$

4.2 Να βρεθούν οι τιμές των x και y έτσι ώστε $(x, 5) = (y - x, y)$.

4.3 Να βρεθούν οι τιμές των $x,\ y$ και z έτσι ώστε

$$(2, -3, 4) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0).$$

4.4 Να δειχθεί ότι $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

4.5 Αν $\mathbf{u}$ είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, να δειχθεί ότι το $\mathbf{0}$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{u}$.

4.6 Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$:
(i) $\mathbf{u} = (2, -3, 6),\ \mathbf{v} = (8, 2, -3)$
(ii) $\mathbf{u} = (1, -8, 0, 5),\ \mathbf{v} = (3, 6, 1, 2)$
(iii) $\mathbf{u} = (3, -5, 2, 1),\ \mathbf{v} = (4, 1, -2, 5)$

4.7 Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ να είναι ορθογώνια.
(i) $\mathbf{u} = (1, k, -3),\ \mathbf{v} = (2, -5, 4)$
(ii) $\mathbf{u} = (2, 3k, -4, 1, 5),\ \mathbf{v} = (6, -1, 3, 7, 2k)$

4.8 Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$
(i) $\mathbf{u} = (1, 7),\ \mathbf{v} = (6, -5)$
(ii) $\mathbf{u} = (3, -5, 4),\ \mathbf{v} = (6, 2, -1)$

4.9 Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε η απόσταση των διανυσμάτων $\mathbf{u} = (2, k, 1, -4)$ και $\mathbf{v}(3, -1, 6, -3)$ να είναι ίση με 6.

4.10 Να βρεθεί το μέτρο $\|\mathbf{u}\|$ του διανύσματος $\mathbf{u}$
(i) $\mathbf{u} = (2, -7)$
(ii) $\mathbf{u} = (3, -12, -4)$

4.11 Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{39}$, όπου $\mathbf{u} = (1, k, -2, 5)$.

4.12 Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι μοναδιαία:

(i) $\mathbf{u} = (1, 0, -\frac{1}{2})$
(ii) $\mathbf{u} = (0, -1, 0)$
(iii) $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
(iv) $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

4.13 Να κανονικοποιηθούν τα διανύσματα
(i) $\mathbf{u} = (-3, 4)$
(ii) $\mathbf{u} = (1, -2, 0, 2)$

4.14 Να επαληθευτεί η ανισότητα των Cauchy-Schwartz στις πιο κάτω περιπτώσεις
(i) $\mathbf{u} = (1, -1),\ \mathbf{v} = (0, 1)$
(ii) $\mathbf{u} = (1, 0, -1),\ \mathbf{v} = (1, -1, 0)$
(iii) $\mathbf{u} = (1, 0, 0, -1),\ \mathbf{v} = (2, 1, 0, 0)$

4.15 Να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u} = (-3, 0, 6, 2)$ και $\mathbf{v} = (1, -2, 0, 2)$.

4.16 Δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ και $P(-3, 1, 2)$.
(i) Να βρεθεί $\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$
(ii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

4.17 Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

όπου $c_1,\ c_2,\ c_3$ είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

$$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

4.18 Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που έχει κορυφές $A(1, 0, 1),\ B(0, 2, 3)$ και $C(2, 1, 0)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το μήκος του ύψους από τη κορυφή C στη πλευρά AB.

4.19 Να αποδειχθούν τα πιο κάτω
(i) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
(ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

4.20 Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

4.21 (i) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η ευθεία $x = -2,\ y = 4 + 2t,\ z = -3 + t$ τέμνει το xy-επίπεδο, το xz-επίπεδο και το yz-επίπεδο.

(ii) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η ευθεία $x = 2-t,\ y = 3t,\ z = -1+2t$ τέμνει το επίπεδο $2y + 3z = 6$.

(iii) Να βρεθεί που η ευθεία $x = 1 + t,\ y = 3 - t,\ z = 2t$ τέμνει το κύλινδρο $x^2 + y^2 = 16$.

4.22 Αν $a,\ b$ και c είναι μη-μηδενικές σταθερές, να δειχθεί ότι κάθε σημείο της ευθείας $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

και αντίθετα, κάθε σημείο (x, y, z) που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις βρίσκεται πάνω στην ευθεία. (Οι πιο πάνω εξισώσεις καλούνται **συμμετρικές εξισώσεις** της γραμμής.)

4.23 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω ζεύγη ευθειών τέμνονται. Στη περίπτωση που τέμνονται, να βρεθεί το σημείο τομής τους:

(i) $x = 2 + t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + t$ και $x = 2 + t,\ y = 3 + 4t,\ z = 4 + 2t$

(ii) $x = -1 + 4t,\ y = 3 + t,\ z = 1$ και $x = -13 + 12t,\ y = 1 + 6t,\ z = 2 + 3t$

(iii) $x = 1 + 7t,\ y = 3 + t,\ z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t,\ y = 6,\ z = 7 + 2t$

(iv) $x = 2 + 8t,\ y = 6 - 8t,\ z = 10t$ και $x = 3 + 8t,\ y = 5 - 3t,\ z = 6 + t$

4.24 (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(-2, 1, 1)$ και της ευθείας $x = 3-t,\ y = t,\ z = 1 + 2t$.

(ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(1, 4, -3)$ και της ευθείας $x = 2 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$.

(iii) Να επαληθευθεί ότι οι ευθείες $x = 2 - t,\ y = 2t,\ z = 1 + t$ και $x = 1 + 2t,\ y = 3 - 4t,\ z = 5 - 2t$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

4.25 Έστω οι ευθείες L_1 και L_2 με εξισώσεις

$$x = 4t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t \ \text{ και } \ x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + 4t,$$

αντίστοιχα.

(i) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών L_1 και L_2.

(ii) Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες L_1 και L_2.

(iii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στις ευθείες L_1 και L_2 και διέρχεται από το σημείο τομής τους.

4.26 (i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2, -5)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x - y + z = 1$ και $x + y - 2z = 3$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(2, 0, 3)$ και την ευθεία $x = -1 + t,\ y = t,\ z = -4 + 2t$.

4.27 Να δειχθεί ότι οι ευθείες

$$x = -1 + 4t,\ \ y = 3 + t,\ \ z = 1$$

και

$$x = -13 + 12t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 2 + 3t$$

τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίον ορίζουν.

4.28 (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(0, 1, 5)$ και του επιπέδου $3x + 6y - 2z = 5$.

(ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων επιπέδων $2x - 3y + 4z = 7$ και $4x - 6y + 8z = 3$.

(iii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3 - t,\ y = 4 + 4t,\ z = 1 + 2t$ και $x = t,\ y = 3,\ z = 2t$.