Ασκήσεις 3

3.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 14 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

3.2 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

3.3 Να δειχθεί ότι η τιμή της πιο κάτω ορίζουσας είναι ανεξάρτητη του θ.

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta - \cos\theta & \sin\theta + \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

3.4 Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών που αντιστοιχούν στους πιο κάτω πίνακας, αφού πρώτα μετατραπούν σε κλιμακωτούς πίνακες.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.5 Να δειχθεί ότι

(i) $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

3.6 Δίνεται ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

Να υπολογιστούν τα εξής:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \text{(iv)} \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$$

3.7 Έστω ότι $\det(\mathbf{A}) = -7$, όπου $\mathbf{A}$ είναι ένας 3×3 πίνακας. Να βρεθούν:
(i) $\det(3\mathbf{A})$ (ii) $\det(2\mathbf{A}^{-1})$ (iii) $\det((2\mathbf{A})^{-1})$ (iv) $\det(\mathbf{A}^2)$

3.8 Χωρίς να αναπτυχθούν οι ορίζουσες, να δειχθεί ότι

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+1)(a-1)(b-1)$

(iv) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

3.9 Έστω ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Για κάθε στοιχείο του πίνακα $\mathbf{A}$ να βρεθούν

(i) η ελάσσων ορίζουσα

(ii) το αλγεβρικό συμπλήρωμα

Στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή της $\det(\mathbf{A})$ αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της

(i) πρώτης γραμμής

(ii) πρώτης στήλης

(iii) δεύτερης γραμμής

(iv) δεύτερης στήλης

(v) τρίτης γραμμής

(vi) τρίτης στήλης

3.10 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης.

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(v)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

3.11 Χρησινοποιώντας τον τύπο $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathrm{adj}(\mathbf{A})$, να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(v)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(vi)} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

3.12 Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ να επιβεβαιωθούν οι παρακάτω ιδιότητες

(i) $\mathbf{A}\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$

(ii) $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A})) = [\det(\mathbf{A})]^2$

3.13 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(iv)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.14 Με τη χρήση του κανόνα του Cramer, να λυθούν τα συστήματα

$$\text{(i)} \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x - 2y - 3z &= -1 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 7 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y - 6z &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(iii)} \begin{aligned} 2z + 10 &= y + 3x \\ x - 3z &= 2y + 8 \\ 4y + z &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\text{(iv)} \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 &= -4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 16 \end{aligned} \qquad \text{(v)} \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

3.15 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3.16 Να λυθεί η άσκηση 1.8 χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

3.17 Να δειχθεί ότι τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$