Ασκήσεις 2

2.1 Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα εξής:

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ (ii) $2\mathbf{A}-\mathbf{C}$ (iii) $2\mathbf{B}+3\mathbf{C}$

Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{D}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{A}+\mathbf{D}=\mathbf{B}$.

2.2 Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = [1,-1,2], \ \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1- \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν (όπου ορίζονται) οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί πινάκων:

(i) $\mathbf{AB}$ (ii) $\mathbf{BA}$ (iii) $\mathbf{AC}$ (iv) $\mathbf{CA}$ (v) $\mathbf{AD}$

(vi) $\mathbf{DB}$ (vii) $\mathbf{CA}^T$ (viii) $\mathbf{B}^T\mathbf{C}$ (ix) $\mathbf{CD}$ (x) $\mathbf{DD}^T$

(xi) $\mathbf{C}^2$ (xii) $\mathbf{CC}^T$ (xiii) $\mathbf{AC}^T\mathbf{B}$ (xiv) $\mathbf{AA}^T$ (xv) $\mathbf{CC}^{-1}$

2.3 Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα γινόμενα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ και να επιβεβαιωθεί ότι

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}).$$

2.4 Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι ορθογώνιοι.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

2.5 Αν ο $\mathbf{A}$ είναι τετραγωνικός πίνακας, να δειχθεί ότι

(i) οι πίνακες $\mathbf{AA}^T$ και $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ είναι συμμετρικοί.

(ii) ο πίνακας $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ είναι αντισυμμετρικός.

2.6 Χρησιμοποιώντας ισοδυναμία πινάκων, να βρεθεί ο αντίστροφος $\mathbf{A}^{-1}$ των πιο κάτω πινάκων.

$$\text{(i) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 10 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \ \text{(ii) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{(iii) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{(iv) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{(v) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(vi) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

2.7 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_8$ είναι σταθερές, δεν είναι αντιστρέψιμος για όλες τις τιμές των σταθερών.

2.8 Με τη χρήση του κατάλληλου αντιστρόφου, να λυθούν τα συστήματα

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -9 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

2.9 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} xy - 2\sqrt{y} + 3yz &= 8 \\ 2xy - 3\sqrt{y} + 2yz &= 7 \\ -xy + \sqrt{y} + 2yz &= 4 \end{aligned}$$

2.10 Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{K}$ έτσι ώστε $\mathbf{AKB} = \mathbf{C}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.11 (i) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{X}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -8 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{X}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.12 Να δειχθεί ότι αν ο πίνακας $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ αν και μόνο αν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

2.13 Έστω ότι $\mathbf{A}$ είναι τετραγωνικός πίνακας με $\mathbf{A}^4 = 0$. Να δειχθεί ότι

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3.$$

2.14 Αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, να δειχθούν τα εξής:
(i) $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$
(ii) $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}$
(iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{BB}^T)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$

2.15 Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, να επιβεβαιωθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
(i) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
(ii) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
(iii) $\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$
(iv) $\mathrm{tr}(5\mathbf{A}) = 5\mathrm{tr}(\mathbf{A})$
(v) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$
(vi) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$