

Ασκήσεις 1

1. Να δειχθεί ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \\x + z &= b \\2x + y + 3z &= c\end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό αν ισχύει $c = a + b$.

2. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς a για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\3x - y + 5z &= 2 \\4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned}$$

- (i) δεν έχει λύση,
(ii) έχει μόνο μια λύση,
(iii) έχει άπειρες λύσεις.

3. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένους κλιμακωτούς

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss για να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$(i) \begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= -2 \\2x_1 + x_2 &= 1 \\3x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned} \quad (ii) \begin{aligned}4x_1 - 8x_2 &= 12 \\3x_1 - 6x_2 &= 9 \\-2x_1 + 4x_2 &= -6\end{aligned}$$

$$(iii) \begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\-6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30\end{aligned} \quad (iv) \begin{aligned}10x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\-2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -4 \\x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}$$

5. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απαλοιφής των Gauss-Jordan για να λυθούν τα γραμμικά συστήματα της άσκησης 4.

6. Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$(i) \begin{aligned}3x_1 + x_3 &= 11 \\2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -3\end{aligned} \quad (ii) \begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 3 \\
 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 & = & -4 \\
 x_1 + x_2 + x_4 & = & 3 \\
 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = & 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -1 \\
 x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & -5 \\
 x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 2
 \end{array}$$

7. Να λυθούν τα πιο κάτω ομογενή γραμμικά συστήματα

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 0 \\
 -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\
 x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\
 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = & 0 \\
 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\
 -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 0 \\
 x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 0 \\
 -2x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 0 \\
 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\
 x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0
 \end{array}$$

8. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k για τις οποίες τα πιο κάτω συστήματα έχουν μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{array}{rcl}
 (k-3)x_1 + x_2 & = & 0 \\
 x_1 + (k-3)x_2 & = & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \\
 x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 0 \\
 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 0 \\
 3x_1 + 6x_2 + kx_3 - 3x_4 & = & 0
 \end{array}$$